



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

704

EXPOSÉS DE PHYSIQUE THÉORIQUE

Publiés sous la direction de
M. LOUIS DE BROGLIE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Lauréat du Prix Nobel

XXV

LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE
ET LES INTERACTIONS ENTRE
LA MATIÈRE
ET LE
RAYONNEMENT

PAR

LOUIS DE BROGLIE



PARIS

HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

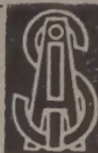
1938





ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.



René AUDUBERT

Directeur de Laboratoire à l'Ecole
des Hautes Etudes

ÉLECTROCHIMIE THÉORIQUE

J.-P. BECQUEREL

Professeur au Museum d'Histoire Naturelle

OPTIQUE ET MAGNÉTISME AUX TRÈS BASSES TEMPÉRATURES

G. BERTRAND

Membre de l'Institut
Professeur à l'Institut Pasteur

CHIMIE BIOLOGIQUE

L. BLARINGHEM

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

BIOLOGIE VÉGÉTALE

Georges BOHN

Professeur à la Faculté des Sciences

ZOOLOGIE EXPÉRIMENTALE

J. BORDET

Prix Nobel
Directeur de l'Institut Pasteur de Bruxelles

MICROBIOLOGIE

J. BOSLER

Directeur de l'Observatoire de Marseille

ASTROPHYSIQUE

Léon BRILLOUIN

Professeur au Collège de France

THÉORIE DES QUANTA

Louis de BROGLIE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique

I. PHYSIQUE THÉORIQUE

II. PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Maurice de BROGLIE

De l'Académie Française
et de l'Académie des Sciences

PHYSIQUE ATOMIQUE EXPÉRIMENTALE

D. CABRERA

Directeur de l'Institut de Physique et Chimie
de Madrid

EXPOSÉS SUR LA THÉORIE DE LA MATIÈRE

E. CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

GÉOMÉTRIE

M. CAULLERY

Membre de l'Académie des Sciences
Professeur à la Faculté des Sciences

BIOLOGIE GÉNÉRALE

L. CAYEUX

Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

GÉOLOGIE

A. COTTON

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

MAGNÉTO-OPTIQUE

Mme Pierre CURIE

Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
Prix Nobel de Chimie

RADIOACTIVITÉ ET PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Véra DANTCHAKOFF

Ancien Professeur à l'Université Columbia
(New-York)

Organisateur de l'Institut
de Morphogenèse Expérimentale
(Moscou Ostankino)

LA CELLULE GERMINALE DANS L'ONTOGÈNE ET L'ÉVOLUTION

E. DARMOIS

Professeur à la Sorbonne

CHIMIE-PHYSIQUE

K. K. DARROW

Bell Telephone Laboratories

CONDUCTIBILITÉS DANS LES GAZ

Arnaud DENJOY

Professeur à la Sorbonne

THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE

J. DUESBERG

Recteur de l'Université de Liège

BIOLOGIE GÉNÉRALE EN RAPPORT AVEC LA CYTOLOGIE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE

B. S. Mathavaru

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

704

EXPOSÉS DE PHYSIQUE THÉORIQUE

Publiés sous la direction de
M. LOUIS DE BROGLIE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Lauréat du Prix Nobel

XXV

LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE
ET LES INTERACTIONS ENTRE LA
MATIÈRE
ET LE
RAYONNEMENT

PAR
LOUIS DE BROGLIE



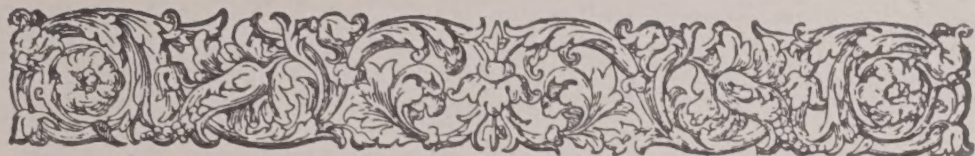
PARIS
HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—
1938

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

COPYRIGHT 1937 BY LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE HERMANN ET C^{ie},
PARIS.



CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LA THÉORIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1. Les équations de Maxwell.

La théorie électromagnétique repose sur des équations fondamentales qui ont été introduites par Maxwell pour résumer l'ensemble des faits connus de son temps en Electricité et en Magnétisme. Ces équations sont les suivantes ⁽¹⁾ :

$$(1) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{h}$$

$$(3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$(2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} + \frac{4\pi \vec{i}}{c} = \text{rot } \vec{H}$$

$$(4) \quad \text{div } \vec{b} = 4\pi \delta$$

Les vecteurs \vec{h} et \vec{H} décrivent le champ électromagnétique : ce sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique. Les vecteurs \vec{b} et \vec{B} sont les inductions correspondantes : elles traduisent la façon dont la matière considérée à notre échelle réagit à l'action des champs. La manière de définir les champs et les inductions par la façon dont on doit les mesurer à l'intérieur d'un corps matériel en y creusant une cavité de forme convenable est expliquée dans tous les traités classiques. Dans le vide, on peut confondre les champs et les inductions et poser $\vec{b} = \vec{h}$ et $\vec{B} = \vec{H}$. Le vecteur \vec{i} est la densité de courant au point de l'espace.

⁽¹⁾ Rappelons les définitions connues :

$$(\text{rot } \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \dots; \text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$[\vec{A} \cdot \vec{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y \dots$$

envisagé ; le scalaire δ est la densité de l'électricité en ce point. Les équations sont écrites en supposant les champs et inductions magnétiques mesurés en unités électromagnétiques, les champs et inductions électriques ainsi que les densités de charge et de courant en unités électrostatiques. La constante c est le rapport de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique de charge électrique.

Comme nous l'avons dit, les équations de Maxwell résument les grands faits de l'Electricité et du Magnétisme. L'équation (1) traduit la loi de l'induction, l'équation (3) affirme la non existence du magnétisme vrai et l'équation (4) dérive de la loi de Coulomb et du théorème de Gauss. Quant à l'équation (2), elle exprime la relation qui existe entre les champs magnétiques et les courants, mais Maxwell l'a complétée en y ajoutant le terme « courant de déplacement » en $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t}$ et ce fut là son trait de génie.

On peut grouper les deux équations vectorielles (1) et (2) et les deux équations scalaires (3) et (4) de deux façons différentes. On peut d'abord grouper (1) et (3) d'une part, (2) et (4) de l'autre. Le premier groupe, usuellement appelé premier groupe des équations de Maxwell, ne dépend pas des grandeurs « matérielles » \vec{i} et δ : il a donc même forme dans le vide et dans la matière. Les équations (3) et (4), par contre, dépendent de \vec{i} et de δ et n'ont pas par suite la même forme dans le vide et dans la matière : elles forment le second groupe des équations de Maxwell.

Une manière différente de grouper les équations consiste à réunir (1) et (2) d'une part, (3) et (4) d'autre part. Les équations (1) et (2) contiennent les dérivées des inductions par rapport au temps et, si l'on suppose connue la relation entre les inductions et les champs, ces équations suffisent en principe à déterminer entièrement l'évolution du champ électromagnétique à partir d'un état initial donné. On peut les appeler les « équations d'évolution ». Les équations (3) et (4) expriment au contraire des conditions que le champ électromagnétique doit satisfaire à tout instant : on peut les nommer les « équations de condition ». Pour que l'ensemble des équations de Maxwell forme un système compatible, il faut que, si les équations de condition sont satisfaites dans un état initial donné, elles restent satisfaites au cours du temps en vertu même des équations d'évolution. Ceci exige que les dérivées

par rapport au temps des équations (3) et (4) soient toujours nulles en vertu des équations (1) et (2). Pour la relation (3), cela va de soi en vertu de (1), mais pour la relation (4) nous obtenons ainsi la condition

$$(5) \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i} = 0$$

en prenant la divergence de (2). La condition (5) exprime la conservation de l'électricité qui est donc exigée par les équations de Maxwell car, sans elle, ces équations ne seraient pas compatibles.

Les relations entre l'induction \vec{b} et le champ \vec{h} et entre l'induction \vec{B} et le champ \vec{H} dépendent des propriétés de la matière au point envisagé. Dans un grand nombre de cas, on peut se contenter de relations linéaires et écrire simplement :

$$(6) \quad \vec{b} = k \vec{h} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

k et μ étant des constantes qu'on nomme respectivement la constante diélectrique et la perméabilité magnétique. Naturellement k et μ peuvent varier d'un point à un autre d'un corps s'il n'est pas homogène : ces constantes peuvent même varier avec le temps si le corps n'est pas dans un état permanent. Dans un corps homogène à l'état permanent, k et μ sont indépendants de la position et de l'instant. Pour le vide, on peut prendre ces constantes égales à 1.

Dans beaucoup de cas également, on peut admettre la relation linéaire

$$(7) \quad \vec{i} = \sigma \vec{h}$$

entre le courant et le champ électrique, σ étant la conductivité du milieu considéré.

Un calcul facile et classique, fait à partir des équations de Maxwell, conduit à admettre que, dans le champ électromagnétique, l'énergie est répartie avec une densité égale en chaque point à

$$(8) \quad W = \frac{1}{8\pi} (k h^2 + \mu H^2)$$

et que le vecteur

$$(9) \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{h} \cdot \vec{H}]$$

représente en chaque point le flux de l'énergie par unité de surface (vecteur de Poynting). Du moins, ces résultats sont-ils exacts quand les relations linéaires (6) sont valables.

2. La théorie électromagnétique de la lumière. — Maxwell a eu l'idée magnifique que la lumière est une perturbation électromagnétique et que toute l'optique n'est qu'un chapitre de l'électromagnétisme. Pour justifier cette hypothèse, il a remarqué que les champs électromagnétiques se propagent dans le vide avec une vitesse égale au rapport c des unités de charge dans les deux systèmes classiques d'unités. En effet, si l'on part des équations 1-4 et si l'on remarque que dans le vide on peut poser $\vec{b} = \vec{h}$ et $\vec{B} = \vec{H}$, on trouve aisément :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = - \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \Delta \vec{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{h} = \Delta \vec{h} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{h} \end{cases}$$

d'après une formule bien connue du calcul vectoriel. D'où en vertu des équations de condition (3) et (4) :

$$(11) \quad \square \vec{h} = 0 \quad \square \vec{H} = 0$$

le signe \square désignant l'opérateur D'Alembertien $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Les équations (11) expriment que la propagation du champ électromagnétique dans le vide a lieu avec la vitesse c . Par exemple une perturbation électromagnétique initialement localisée dans une région ponctuelle s'étale ensuite sphériquement dans l'espace, le front d'onde de la perturbation s'avançant avec la vitesse c .

En particulier, les équations (11) admettent comme solution l'onde plane monochromatique

$$(12) \quad \begin{cases} \vec{h} = \vec{h}_0 \cos [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi] \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi] \end{cases}$$

dans laquelle ν est la fréquence de l'onde, α, β, γ les cosinus directeurs de la direction de propagation liés par la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Si les champs \vec{h} et \vec{H} n'avaient à satisfaire que les équations du second ordre (11), on pourrait prendre pour \vec{h}_0 et \vec{H}_0 deux vecteurs constants quelconques, mais \vec{h} et \vec{H} doivent satisfaire aux équations du premier ordre de Maxwell qui sont plus restrictives. Désignons par \vec{n} le vecteur de longueur unité dirigé dans le sens de la propagation : il a pour composantes α, β et γ .

En introduisant les valeurs (12) dans les équations de Maxwell, les équations d'évolution donnent :

$$(13) \quad \vec{h}_0 = - [\vec{n} \cdot \vec{H}_0] \quad \vec{H}_0 = [\vec{n} \cdot \vec{h}_0]$$

tandis que les équations de condition donnent :

$$(14) \quad (\vec{n} \cdot \vec{h}_0) = 0 \quad (\vec{n} \cdot \vec{H}_0) = 0$$

Ces dernières relations expriment que les vecteurs \vec{h}_0 et \vec{H}_0 sont perpendiculaires à la direction de propagation, c'est-à-dire situées dans le plan d'onde. Les conditions (13), qui sont une conséquence l'une de l'autre, expriment que dans le plan d'onde les vecteurs \vec{h}_0 et \vec{H}_0 sont perpendiculaires entre eux. Comme \vec{n} est un vecteur de longueur unité, les vecteurs \vec{h}_0 et \vec{H}_0 sont égaux entre eux : autrement dit, avec le système d'unités que nous avons choisi pour écrire les équations de Maxwell, le champ électrique et le champ magnétique de l'onde monochromatique plane sont égaux. En identifiant le vecteur lumineux de Fresnel avec le champ électrique (l'expérience a montré que l'on peut faire cette identification), on obtient une onde qui a tous les caractères classiques de l'onde lumineuse transversale.

Cette interprétation électromagnétique de la lumière a donc conduit Maxwell à annoncer que la vitesse de la lumière dans le vide doit être exactement égale au rapport c des unités. C'est là une prévision qui peut être soumise au contrôle de l'expérience puisque la vitesse de la lumière dans le vide et le rapport des unités peuvent être mesurés tout à fait indépendamment par des méthodes appropriées. Déjà Maxwell avec les résultats connus de son temps a pu montrer que l'égalité prévue était très probable. Depuis, des mesures faites avec une précision croissante ont permis de vérifier avec une approximation de plus en plus serrée que la vitesse de la lumière dans le vide est bien égale à la constante c . De plus, la découverte par Hertz d'ondes électromagnétiques qui ne diffèrent de la lumière que par leur longueur d'onde et qu'on obtient par des procédés purement électriques, a assuré le triomphe des idées de Maxwell.

Dans les milieux matériels transparents, la lumière se propage en subissant la réaction du milieu. Les équations de Maxwell sont encore applicables, mais en distinguant les champs des inductions. Maxwell a obtenu une relation remarquable entre l'indice de

réfraction et la constante diélectrique d'un corps réfringent, homogène et isotrope auquel on peut appliquer les relations (6) entre champs et inductions. Pour la retrouver, il suffit d'écrire les équations de Maxwell (1-4) en y introduisant les relations (6) de façon à éliminer les inductions, puis à chercher une solution des équations obtenues ayant la forme d'une onde plane monochromatique, c'est-à-dire représentée par les champs :

$$(15) \quad \begin{cases} \vec{h} = \vec{h}_0 \cos [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi] & (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1) \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{V} \right) + \varphi] \end{cases}$$

On trouve alors que la vitesse de propagation V doit avoir la valeur :

$$(16) \quad V = \frac{c}{\sqrt{k\mu}}$$

Comme la plupart des milieux réfringents ne sont pas magnétiques, c'est-à-dire que l'on a généralement $\mu = 1$, on peut très souvent poser

$$(17) \quad V = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

Par suite, l'indice de réfraction n d'un milieu réfringent étant par définition le rapport des vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu, on obtient finalement la « relation de Maxwell »

$$(18) \quad k = n^2$$

qui se vérifie bien quand on a soin de mesurer la constante diélectrique et l'indice dans des conditions comparables, en particulier pour des ondes électromagnétiques de même fréquence.

Revenons au cas du vide. Si nous appliquons à l'onde lumineuse (12) les formules (8) et (9) avec $k = \mu = 1$, nous obtenons

$$(19) \quad \begin{cases} W = \frac{1}{8\pi} (h^2 + H^2) = \frac{h_0^2}{4\pi} \cos^2 [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi] \\ \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{h} \cdot \vec{H}] = \frac{ch_0^2}{4\pi} \cos^2 [2\pi\nu \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) + \varphi] = Wc \vec{n} \end{cases}$$

La répartition de l'énergie et du vecteur de Poynting dans l'onde plane ne serait donc pas uniforme, résultat un peu surprenant peut-être au point de vue physique. Mais en pratique, en raison de la valeur toujours élevée de la fréquence ν , on ne peut

espérer observer que la valeur moyenne des grandeurs précédentes, soit :

$$(20) \quad \overline{W} = \frac{h_0^2}{8\pi} \quad \overline{\vec{S}} = \frac{ch_0^2}{8\pi} = \overline{W}c \vec{n}$$

L'expression du vecteur de Poynting montre bien que l'énergie lumineuse progresse dans le vide avec la vitesse c .

3. La théorie des électrons. — A la suite de la découverte de l'électron, on a été conduit à admettre que la matière est formée d'un nombre énorme de particules électrisées. Quand la matière est électriquement neutre, cela veut dire qu'elle contient autant de particules positives que de négatives : quand elle est chargée, cela signifie qu'il y a un excès local de particules d'un certain signe. Quand la matière est le siège d'un courant, il y a en elle un déplacement d'ensemble des particules électrisées, etc.

Cette conception de la structure discontinue de l'électricité conduit à développer la théorie électromagnétique sous une forme nouvelle à laquelle est attaché le nom de H.-A. Lorentz. Au lieu de se contenter des champs électriques et magnétiques observables (champs macroscopiques), Lorentz a cherché à définir les champs tels qu'ils doivent exister au sein de la matière, soit entre les particules, soit même à l'intérieur de ces particules. Il a voulu ainsi donner une description du champ électromagnétique plus détaillée, plus fine, que celle fournie par la théorie de Maxwell. Le champ électromagnétique est décrit par deux vecteurs \vec{h} et \vec{H} qui sont cette fois les champs microscopiques bien différents des champs macroscopiques \vec{h} et \vec{H} de Maxwell. Il n'y a plus lieu d'introduire les inductions car la différence entre induction et champ est en quelque sorte dans la théorie de Lorentz une apparence macroscopique.

Pour préciser la forme des champs macroscopiques, Lorentz a admis que ces champs obéissent partout à des équations de même forme que celle de Maxwell et cela même à l'intérieur des électrons. Il écrit donc le système d'équations :

$$(21) \quad -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot } \vec{h} \quad (23) \quad \text{div } \vec{H} = 0$$

$$(22) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{rot } \vec{H} - 4\pi \frac{\rho}{c} \quad (24) \quad \text{div } \vec{h} = 4\pi\rho$$

\vec{h} et \vec{H} étant, répétons-le, les champs microscopiques. Dans ces équations, ρ est la densité microscopique de charge électrique, nulle hors des électrons et ayant des valeurs non nulles (d'ailleurs inconnues) à leur intérieur tandis que la densité macroscopique δ des équations de Maxwell est une grandeur globale définie par l'excès des particules d'un certain signe contenues dans un élément de volume très petit à notre échelle, mais renfermant cependant un très grand nombre de particules. Le vecteur \vec{v} est la vitesse de l'électricité en chaque point à l'intérieur des charges de sorte que $\rho \vec{v}$ est la densité microscopique de courant électrique remplaçant la densité macroscopique \vec{i} des équations de Maxwell.

Quand on a affaire à un corps matériel renfermant un nombre immense de charges électriques élémentaires mutuellement en mouvement, on ne peut observer que les valeurs moyennes des champs. Ces valeurs moyennes diffèrent d'ailleurs suivant le procédé de mesure, suivant par exemple qu'on mesurera la force subie par un corps d'épreuve électrisé placé dans une cavité de forme aplatie ou de forme allongée creusée dans la matière où l'on étudie les champs. On parvient ainsi à définir, comme valeurs moyennes observables, les champs et les inductions macroscopiques qui figurent dans les équations de Maxwell. On peut aussi montrer que, si les équations de Lorentz sont exactes microscopiquement, il en résulte que les inductions et les champs macroscopiques obéissent aux équations de Maxwell ⁽¹⁾ : cela était évidemment nécessaire pour que les équations de Lorentz fussent acceptables.

La théorie des électrons de Lorentz, en plus des équations écrites plus haut, repose sur une équation complémentaire dite « équation de la force de Lorentz » qui exprime la force microscopique subie par un élément de charge $\rho d\tau$ animé de la vitesse \vec{v} dans le champ électromagnétique défini par les vecteurs \vec{h} et \vec{H} . Cette force est, d'après Lorentz, donnée par l'expression :

$$(25) \quad \vec{f} d\tau = \vec{h} \rho d\tau + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \vec{H}] \rho d\tau.$$

Cette expression est choisie, elle aussi, par extrapolation du

⁽¹⁾ Voir par exemple : RICHARDSON, *The electron theory of Matter*, Cambridge University Press, 1914, chapitre IX.

macroscopique au microscopique. Elle est telle qu'en repassant aux phénomènes à grande échelle, on retrouve la définition usuelle de la force électrique et la loi d'action des champs magnétiques sur les courants (loi de Laplace).

En combinant les équations (21)-(24), on trouve facilement qu'en dehors des charges électriques ($\rho = 0$), les champs \vec{h} et \vec{H} se propagent suivant les équations :

$$(26) \quad \square \vec{h} = 0 \quad \square \vec{H} = 0$$

qui expriment la propagation des champs électromagnétiques dans le vide avec la vitesse c . On retrouve aussi la conservation de l'électricité sous la forme :

$$(27) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \vec{v}) = 0$$

et l'on obtient pour les expressions microscopiques de la densité d'énergie et du vecteur de Poynting

$$(28) \quad W = \frac{1}{8\pi} (h^2 + H^2) \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{h} \cdot \vec{H}].$$

4. Les potentiels électromagnétiques. — Le champ électromagnétique est défini en théorie de Lorentz par les 6 grandeurs $h_x \dots H_z$, mais il est possible de ramener la connaissance de ces 6 grandeurs à celle de 4 grandeurs dont elles se déduisent par des opérations de dérivation. Ce sont les « potentiels électromagnétiques » que nous allons étudier en restant dans le cadre de la théorie de Lorentz.

Considérons les équations (21) et (23) qui forment le premier groupe des équations de Lorentz. L'équation (23) suggère de poser:

$$(29) \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

puisque la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Mais alors l'équation (21) nous donne :

$$(30) \quad \operatorname{rot} \left(\vec{h} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Nous voyons donc que la quantité $\vec{h} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ peut être considé-

rée comme le gradient d'une fonction scalaire que nous appellerons $-V$. Nous avons donc ⁽¹⁾ :

$$(31) \quad \vec{h} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Le vecteur \vec{A} est appelé le potentiel vecteur, le scalaire V le potentiel scalaire. Les équations (29) et (31) nous donnent donc bien les 6 grandeurs $h_x \dots H_z$ en fonction des 4 grandeurs A_x, A_y, A_z et V .

Mais nous devons encore écrire que les champs \vec{h} et \vec{H} ainsi définis à l'aide des potentiels satisfont aux équations (22) et (24) du second groupe de Lorentz. En utilisant des formules classiques du calcul vectoriel, on obtient ainsi sans peine les relations

$$(32) \quad \begin{cases} \square V - 4\pi\rho = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right] \\ \square \vec{A} - 4\pi\rho \frac{\vec{v}}{c} = -\text{grad} \left[\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} \right] \end{cases}$$

Lorentz a donné à ces équations une forme plus simple en profitant de la circonstance suivante : les potentiels, tels que nous les avons définis, ne sont pas déterminés d'une façon univoque quand on connaît les champs. En effet, si, à des champs \vec{h} et \vec{H} donnés, correspondent des potentiels \vec{A} et V satisfaisant aux équations (29) et (31), les potentiels

$$(33) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } F; \quad V' = V - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}$$

où F est une fonction dérivable quelconque de $xyzt$, satisfont aussi à (29) et à (31). Si donc on admet que seuls les champs ont une signification physique, les potentiels n'étant que des intermédiaires de calcul, le choix des potentiels comporte un certain arbitraire correspondant à la fonction F . On peut donc s'imposer une certaine condition à laquelle les potentiels devront satisfaire si cette condition entraîne seulement une restriction dans notre

⁽¹⁾ Nous appelons grad V le vecteur dont les composantes rectangulaires sont $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ et $\frac{\partial V}{\partial z}$.

liberté de choisir arbitrairement la fonction F . Lorentz a ainsi pu imposer aux potentiels de satisfaire à la condition suivante :

$$(34) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial V}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0$$

dite « relation complémentaire de Lorentz entre les potentiels ».

Un coup d'œil jeté sur les équations (32) explique tout de suite la raison pour laquelle Lorentz a imposé aux potentiels la condition (34). Moyennant cette condition, en effet, les potentiels satisfont dans le vide aux équations :

$$(35) \quad \square \vec{A} = 0 \quad \square V = 0$$

Autrement dit, les potentiels, tout comme les champs, se propagent dans le vide avec la vitesse c . Ceci résulte des équations (32) où l'on fait $\rho = 0$ et où l'on tient compte de (34).

Grâce à (34), nous pouvons écrire les équations (32) dans les régions où il y a des charges sous la forme générale :

$$(36) \quad \square \vec{A} = 4\pi\rho \frac{\vec{\varphi}}{c} \quad \square V = 4\pi\rho.$$

Nous voyons alors que les charges et les courants jouent le rôle de sources pour les potentiels et un raisonnement bien connu de Kirchhoff nous apprend que la solution des équations (36) peut être écrite sous la forme ⁽¹⁾.

$$(37) \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \frac{[\rho \vec{\varphi}]}{r} d\tau \quad V = \int \frac{[\rho]}{r} d\tau$$

où r désigne la distance entre le point où l'on calcule les potentiels et l'élément de volume $d\tau$. Les quantités entre crochets doivent avoir les valeurs correspondant à l'instant $t - \frac{r}{c}$, c'est-à-dire au temps antérieur de $\frac{r}{c}$ au temps t pour lequel on calcule les potentiels : on exprime ainsi la propagation des actions électromagnétiques avec la vitesse c . Les potentiels (37) sont nommés « potentiels retardés ».

On pourrait obtenir une autre solution de (36) en changeant c en $-c$, c'est-à-dire en prenant pour valeurs des crochets dans (37) les valeurs correspondant au temps $t + \frac{r}{c}$. On aurait ainsi des

⁽¹⁾ Voir par exemple : LORENTZ, *Theory of electrons*, Teubner, Leipzig, 2^e édition 1916, p. 233, note 4.

« potentiels avancés », mais cette solution qui ferait dépendre le présent de l'avenir est considérée comme physiquement inacceptable.

5. Rayonnement d'une distribution d'électricité en mouvement.

— L'emploi des potentiels retardés permet de calculer le champ électromagnétique qui entoure une distribution d'électricité dont la densité ρ et la vitesse \vec{v} sont connues en chaque point et à chaque instant.

Donnons d'abord quelques indications sur le cas d'une distribution statique où \vec{v} est partout nulle et ρ partout indépendant du temps. Nous supposons cette distribution d'électricité limitée à un domaine \mathcal{V} de dimensions finies et nous cherchons le champ électromagnétique existant en un point éloigné de la distribution.

Prenons une origine O à l'intérieur de la distribution et supposons que le point où nous voulons calculer les potentiels soit à une distance R de cette origine dans la direction de cosinus directeurs α, β, γ . Par hypothèse, la distance R est grande par rapport à la distance à l'origine d'un point quelconque de la distribution. Le potentiel vecteur en P est évidemment nul ; quant au potentiel scalaire, on lui trouve la valeur suivante :

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} V = \frac{\varepsilon}{R} + \frac{1}{R^2} (\alpha \mathcal{P}_x + \beta \mathcal{P}_y + \gamma \mathcal{P}_z) + \frac{1}{2R^3} [(3\alpha^2 - 1)\mathcal{P}_{xx} + (3\beta^2 - 1)\mathcal{P}_{yy} \\ + (3\gamma^2 - 1)\mathcal{P}_{zz} + 6\alpha\beta\mathcal{P}_{xy} + 6\beta\gamma\mathcal{P}_{yz} + 6\gamma\alpha\mathcal{P}_{zx}] + \dots \end{aligned} \right.$$

en posant les définitions suivantes :

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \int_{\mathcal{V}} \rho d\tau & \mathcal{P}_x &= \int_{\mathcal{V}} \rho x d\tau & \mathcal{P}_y &= \int_{\mathcal{V}} \rho y d\tau & \mathcal{P}_z &= \int_{\mathcal{V}} \rho z d\tau \\ \mathcal{P}_{xx} &= \int_{\mathcal{V}} \rho x^2 d\tau & \mathcal{P}_{yy} &= \int_{\mathcal{V}} \rho y^2 d\tau & \mathcal{P}_{zz} &= \int_{\mathcal{V}} \rho z^2 d\tau \\ \mathcal{P}_{yz} &= \int_{\mathcal{V}} \rho yz d\tau & \mathcal{P}_{zx} &= \int_{\mathcal{V}} \rho zx d\tau & \mathcal{P}_{xy} &= \int_{\mathcal{V}} \rho xy d\tau \end{aligned} \right.$$

ε est la charge totale de la distribution. Le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ de composantes $\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y, \mathcal{P}_z$ est son moment électrique dipolaire. Le tenseur symétrique du second rang $\vec{\mathcal{P}}$ de composantes $\mathcal{P}_{xx}, \mathcal{P}_{yy}, \mathcal{P}_{zz}, \mathcal{P}_{yz} = \mathcal{P}_{zy}$ et $\mathcal{P}_{zx} = \mathcal{P}_{xz}$ et $\mathcal{P}_{xy} = \mathcal{P}_{yx}$ est son moment électrique quadrupolaire. Pour une distribution dont la charge totale n'est pas nulle, le terme

en $\frac{e}{R}$ dans (38) est prépondérant : c'est le potentiel Coulombien que créerait la distribution si elle était rassemblée au point O. Pour une distribution dont la charge totale serait nulle, le moment dipolaire ne l'étant pas (c'est le cas des doublets électriques), les termes dipolaires en $\frac{1}{R^2}$ sont prépondérants. Enfin, pour une distribution dont la charge totale et le moment dipolaire seraient tous deux nuls, les termes quadrupolaires provenant de $\frac{1}{R^3}$ seraient les plus importants. En continuant le développement (38) au delà des termes écrits explicitement, on trouverait d'ailleurs des termes supérieurs, octopolaires, etc., mais ces termes inter-

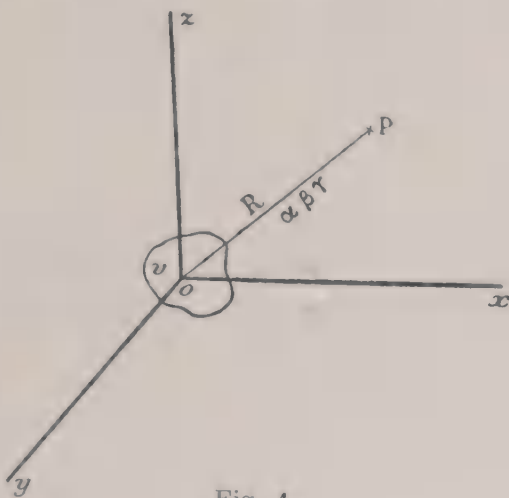


Fig. 1.

viennent rarement en pratique dans les calculs. On remarquera que plus est grande la symétrie de la distribution électrique, plus le développement du potentiel commence par des termes d'ordre élevé, plus par suite le champ extérieur est faible.

Nous venons d'étudier le cas d'une distribution statique. Une telle distribution électrique ne rayonne pas, mais il en est autrement dans le cas d'une distribution non statique. Le calcul du rayonnement qu'émet une distribution électrique variable est un sujet d'une importance capitale pour toutes les questions que nous aurons à traiter dans cet ouvrage et nous devons résumer les résultats de la théorie électromagnétique sur ce point. Comme la charge totale d'une distribution doit rester constante en vertu de la conservation de l'électricité, on peut ramener l'origine du rayonnement aux variations des moments dipolaires, quadrupolaires, etc. Dans le cas général où le moment dipolaire de la dis-

tribution n'est pas constamment nul, ce sont les variations de ce moment dipolaire qui provoquent la partie de beaucoup la plus importante du rayonnement. Dans tous les cas où nous aurons à faire appel aux résultats de la théorie électromagnétique du rayonnement, nous supposerons négligeables les rayonnements correspondants aux termes quadrupolaires, etc., quitte à signaler incidemment ce qui peut arriver quand cette hypothèse ne se trouve pas justifiée.

Pour calculer le rayonnement émis par une distribution électrique non statique, il faut tout d'abord calculer à l'aide des relations (37) les potentiels créés à chaque instant par la distribution en un point P situé à une distance R de l'origine choisie O qui soit très grande par rapport à toutes les dimensions de la région occupée par l'électricité (voir fig. 1). Des potentiels, on déduira les champs, puis on calculera le flux du vecteur de Poynting à travers une sphère de centre O et de rayon R. La limite de la valeur de ce flux quand R tend vers l'infini donnera l'énergie rayonnée en une unité de temps par la distribution. Telle est la marche de ce raisonnement dont nous ne voulons indiquer ici que les grandes lignes.

Tout d'abord, on voit que seuls les termes en $\frac{1}{R}$ dans l'expression des potentiels apporteront au flux du vecteur de Poynting des contributions qui garderont une valeur finie quand R tendra vers l'infini. Les termes en R^{-2} , R^{-3} ... donneront des contributions qui tendront vers zéro à la limite et ces termes pourront par suite être négligés dans le calcul du rayonnement. Or, à ce degré d'approximation, le calcul des potentiels par les formules (37) montre qu'il suffit de poser :

$$(40) \quad V(P, t) = 0 \quad \vec{A}(P, t) = \frac{1}{cR} [\vec{\mathcal{F}}]$$

où $\vec{\mathcal{F}}$ désigne la dérivée vectorielle par rapport au temps du vecteur $\vec{\mathcal{E}}$ défini en (39). Le crochet indique que cette grandeur doit être prise à l'instant $t - \frac{R}{c}$.

Pour simplifier le problème, on remarque alors que chacune des composantes rectangulaires de $\vec{\mathcal{E}}$ peut se développer en série de Fourier sous la forme :

$$(41) \quad \mathcal{E}_x(t) = \sum_n \mathcal{E}_x^{(n)} \cos 2\pi(nvt + \varphi_x)$$

si le mouvement de la distribution admet une période $T = \frac{1}{\nu}$, ou en intégrale de Fourier de la forme :

$$(42) \quad \mathcal{E}_x(t) = \int_0^\infty \mathcal{E}_x(\nu) \cos 2\pi[\nu t + \varphi(\nu)] d\nu$$

dans le cas général. Puis on démontre : 1° que le rayonnement s'obtient en faisant la somme des rayonnements dus à chaque composante harmonique de $\vec{\mathcal{E}}$; 2° que le rayonnement correspondant à l'une des composantes harmoniques de $\vec{\mathcal{E}}$ s'obtient en faisant la somme des rayonnements dus aux trois composantes rectangulaires de cette composante harmonique, considérées isolément. Si donc on sait calculer le rayonnement émis dans le cas simple où l'on a :

$$(43) \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0 \quad \mathcal{E}_z = A_0 \cos 2\pi(\nu t + \varphi)$$

on saura le calculer dans le cas général par superposition.

Il suffit donc de traiter ce cas particulier qui est en somme celui d'un doublet électrique oscillant harmoniquement le long de l'axe oz . Plaçons toujours l'origine des coordonnées à l'intérieur de la distribution et considérons un point P très éloigné ; nous aurons la figure suivante :

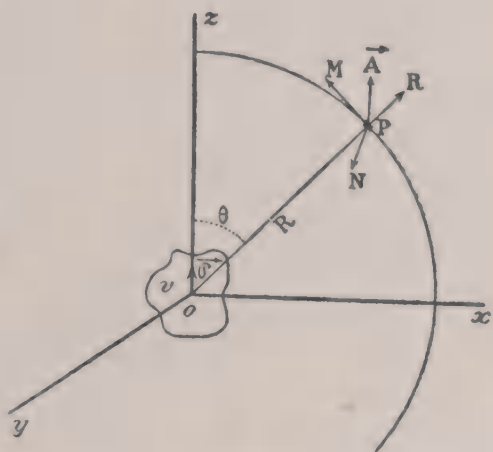


Fig. 2.

En vertu de l'expression (40), le potentiel $\vec{A}(P, t)$, ou plus exactement la partie de ce potentiel qui nous intéresse, est parallèle à l'axe oz . Si en P nous désignons par R la direction radiale ; par M la direction de la tangente au méridien, par N celle de la normale au plan méridien, nous avons évidemment :

$$(44) \quad A_R(P, t) = A(P, t) \cos \theta ; \quad A_M(P, t) = A(P, t) \sin \theta ; \quad A_N(P, t) = 0$$

On montre aisément que la composante radiale A_R , donnant naissance à une composante du vecteur de Poynting normale au rayon vecteur, ne contribue pas au rayonnement. Nous pouvons donc, pour calculer le rayonnement, nous contenter de considérer le potentiel-vecteur transversal $\vec{A}^{(tr)}$ de composantes :

$$(45) \quad A_R^{(tr)} = A_N^{(tr)} = 0 \quad A_M^{(tr)} = A(P, t) \sin \theta = \frac{1}{cR} [\dot{x}_z] \sin \theta \\ = -\frac{2\pi\nu}{cR} \sin \theta A_0 \sin 2\pi[\nu \left(t - \frac{R}{c}\right) + \varphi]$$

d'après (40) et (43). A partir de ce potentiel, on calcule les champs « radiants » en P à l'instant t et l'on trouve :

$$(46) \quad \begin{cases} h_N = h_R = 0 \\ h_M = -\frac{1}{c} \frac{\partial A^{(tr)}}{\partial t} = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2R} \sin \theta A_0 \cos 2\pi[\nu \left(t - \frac{R}{c}\right) + \varphi] \\ H_M = H_R = 0 \\ H_N = \frac{\partial A_R^{(tr)}}{\partial M} - \frac{\partial A_M^{(tr)}}{\partial R} = \frac{4\pi^2\nu^2}{c^2R} \sin \theta A_0 \cos 2\pi[\nu \left(t - \frac{R}{c}\right) + \varphi] \end{cases}$$

Les deux champs sont donc égaux, perpendiculaires à la direction OP et perpendiculaires entre eux. Ils sont placés comme les vecteurs de l'onde lumineuse plane à laquelle une petite portion de l'onde sphérique est assimilable à la distance très grande R du centre O. Le flux de l'énergie dans le sens radial au point P s'obtient en calculant le vecteur de Poynting avec les valeurs (46) des champs ; on trouve aisément pour les composantes de ce vecteur :

$$(47) \quad S_M = S_N = 0 \quad S_R = \frac{c}{4\pi} h_M \cdot H_N = \frac{4\pi^3 \nu^4}{c^3 R^2} \sin^2 \theta A_0^2 \cos^2 2\pi[\nu \left(t - \frac{R}{c}\right) + \varphi]$$

Le flux rayonné est radial et varie comme $\sin^2 \theta$ avec l'angle de colatitude θ ; maximum dans le plan de l'équateur, il est nul sur la ligne des pôles (direction du vecteur \vec{x}).

Le flux moyen s'obtient en remplaçant dans (47) le terme \cos^2 par sa valeur moyenne dans le temps égale à $\frac{1}{2}$. D'où :

$$\bar{S}_R = \frac{2\pi^3 \nu^4}{c^3 R^2} \sin^2 \theta A_0^2.$$

flux total \bar{S}_R sur la sphère de rayon R et ce flux

total, indépendant de R , donnera la quantité d'énergie rayonnée par unité de temps ΔW . On trouve ainsi :

$$(49) \quad \Delta W = \int_0^\pi S_R 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{4\pi^4 v^4}{c^3} A_0^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{16\pi^4 v^4}{3c^3} A_0^2$$

Cette formule fondamentale résout entièrement le problème.

On peut écrire le résultat (49) autrement en remarquant, si le vecteur \vec{x} au lieu d'être représenté par la composante x_z de (43) était donné par l'expression équivalente ⁽¹⁾ :

$$(50) \quad x_z = p_0 e^{2\pi i \nu t} + p_0^* e^{-2\pi i \nu t} \quad \text{avec} \quad p_0 = \frac{A_0}{2} e^{2\pi i \varphi}$$

on aurait à remplacer dans (49) A_0^2 par $|2p_0|^2$ et l'on aurait alors :

$$(51) \quad \Delta W = \frac{64\pi^4 v^4}{3c^3} |p_0|^2$$

Comme nous l'avons vu, le résultat obtenu ainsi dans le cas simple du doublet harmonique nous permet de résoudre le problème général de l'émission de rayonnement par une distribution quelconque (en nous tenant toujours au rayonnement dipolaire). Dans le cas général, le moment électrique \vec{x} de la distribution sera développable en intégrale de Fourier de la forme

$$(52) \quad \vec{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{p}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

où les $\vec{p}(\nu)$ sont des vecteurs complexes tels que $\vec{p}(\nu) = p^*(-\nu)$. Les coefficients $\vec{p}(\nu)$ se calculent par la formule classique :

$$(53) \quad \vec{p}(\nu) = \int_0^{+\infty} \vec{x} e^{-2\pi i \nu t} dt$$

L'énergie rayonnée par la distribution en une unité de temps dans l'intervalle de fréquence $\nu - \nu + \delta\nu$ est alors égale à :

$$(54) \quad \delta W = \frac{64\pi^4 v^4}{3c^3} |\vec{p}(\nu)|^2 \delta\nu$$

où $|\vec{p}(\nu)|^2$ désigne la somme des carrés des modules des trois composantes de $\vec{p}(\nu)$.

Naturellement le rayonnement d'énergie par une distribution électrique en mouvement a pour effet d'amortir ce mouvement.

⁽¹⁾ Nous désignons ici et dans la suite par a^* la quantité complexe conjuguée de a .

Considérons par exemple le cas d'un électron qui vibre le long d'une droite autour d'une position d'équilibre sous l'influence d'une force proportionnelle à l'élongation : c'est l'oscillateur linéaire dont nous aurons souvent à reparler. Son mouvement est harmonique de fréquence ν déterminée par sa masse et la force du lien élastique. Le rayonnement de l'oscillateur est donné par la formule (49) où $\frac{A_0}{e}$ est l'amplitude de sa vibration. On calcule facilement que l'énergie de l'oscillateur s'amortit suivant la loi :

$$(55) \quad W = W_0 e^{-\gamma t} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{8\pi^2 \nu^2 e^2}{3c^3 m}$$

e et m étant la charge et la masse de l'électron. L'inverse de γ est souvent nommé la « vie moyenne » de l'oscillateur.

Par suite de l'amortissement par rayonnement, aucun vibreur électrique ne peut avoir un mouvement strictement sinusoïdal. Si l'amortissement est faible, l'abscisse du vibreur est représentée en fonction du temps par une intégrale de Fourier dont les seules composantes de valeur notable occupent une très petite bande de fréquences autour de la valeur ν qu'aurait rigoureusement l'oscillateur s'il n'y avait pas l'amortissement par rayonnement. La radiation émise par l'oscillateur ne peut donc pas être strictement monochromatique : la raie émise a une largeur que l'on peut d'ailleurs facilement évaluer si l'on connaît la constante d'amortissement γ de l'oscillateur, c'est-à-dire les constantes e et m . Nous renvoyons pour l'étude de ces questions aux ouvrages classiques.

6. La théorie électromagnétique de la dispersion. — La théorie électromagnétique interprète la différence entre les champs et les inductions dans un milieu matériel comme étant le résultat de l'état de polarisation créé dans le milieu par l'existence du champ. La polarisation d'un milieu matériel consiste en ce que chaque élément de volume $d\tau$ du milieu devient un petit doublet électrique de moment $\vec{P}d\tau$; le vecteur \vec{P} est par définition le vecteur « polarisation dans l'élément $d\tau$ ». On peut dire aussi que \vec{P} est la densité de moment électrique dans l'élément $d\tau$. On démontre dans tous les traités d'électricité qu'un milieu polarisé (supposé électriquement neutre dans toute sa masse) se comporte comme si chacun des éléments de sa surface extérieure portait une den-

sité électrique égale à la composante P_n du vecteur \vec{P} en chaque point et comme si l'intérieur de son volume était le siège d'une densité électrique δ et d'une densité de courant i données par les relations :

$$(56) \quad \rho = -\operatorname{div} \vec{P} \quad \vec{i} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

On peut alors facilement expliquer la différence du champ et de l'induction électriques dans le milieu à l'aide de la polarisation de ce milieu sous l'influence du champ. On peut s'en rendre compte en raisonnant comme il suit. La présence du champ faisant apparaître dans le milieu les charges et courants définis par (56), nous devrions écrire comme équations de l'électromagnétisme dans le milieu :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{h} & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{h} = -4\pi \operatorname{div} \vec{P} \end{array} \right.$$

Mais les courants et les charges définis par (56) ne sont pas observables macroscopiquement et nous n'en pouvons constater les effets qu'indirectement. Ainsi sommes-nous amenés à écrire les équations (57) sous la forme :

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{h} & \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H} & \operatorname{div} \vec{b} = 0 \end{array} \right.$$

c'est-à-dire à distinguer l'induction \vec{b} du champ \vec{h} en posant par définition :

$$(59) \quad \vec{b} = \vec{h} + 4\pi \vec{P}$$

Un raisonnement analogue permettrait de comprendre la différence entre l'induction magnétique et le champ magnétique dans un milieu magnétiquement polarisable. Nous nous bornerons ici au cas des milieux matériels qui ne sont pas magnétiquement polarisables.

La polarisation électrique d'un milieu étant produite par l'action du champ électrique imposé, on doit avoir une relation de la forme :

$$(60) \quad \vec{P} = f(\vec{h})$$

et par suite grâce à (59) une autre relation vectorielle de la forme :

$$(61) \quad \vec{b} = F(\vec{h})$$

L'induction est donc une fonction du champ qui dépend de la manière dont le milieu se polarise sous l'action de ce champ. L'hypothèse la plus simple, qui se montre en accord avec les faits dans un grand nombre de cas, consiste à poser :

$$(62) \quad \vec{P} = \alpha \vec{h}$$

α étant une constante, c'est-à-dire ne dépendant pas de \vec{h} . On a alors d'après (59) :

$$(63) \quad \vec{b} = (1 + 4\pi\alpha) \vec{h} = k \vec{h} \quad \text{avec} \quad k = 1 + 4\pi\alpha$$

La constante diélectrique k se trouve exprimée en fonction de la susceptibilité α . Le milieu envisagé n'étant pas magnétique par hypothèse, la relation de Maxwell (18) doit être valable et nous obtenons l'expression suivante pour le carré de l'indice de réfraction :

$$(64) \quad n^2 = 1 + 4\pi\alpha$$

Plaçons-nous dans le cas simple d'un milieu matériel homogène contenant N atomes ou molécules par unité de volume. On peut en première approximation (et ceci est nécessaire pour que (62) soit valable) supposer que, sous l'action du champ extérieur, chaque atome ou molécule acquiert un moment électrique $\vec{\mathcal{F}}$ proportionnel à \vec{h} . On aura alors :

$$(65) \quad \vec{\mathcal{F}} = \alpha' \vec{h}$$

où α' est la « polarisabilité » de l'atome ou de la molécule. On a évidemment :

$$(66) \quad \vec{P} = N \vec{\mathcal{F}} = N\alpha' \vec{h}$$

Par suite, α est égal à $N \alpha'$ et la formule (64) devient :

$$(67) \quad n^2 = 1 + 4\pi N \alpha'$$

La constante α' dépend de la structure de l'atome ou molécule du corps envisagé, mais ne dépend pas en principe de la densité D du corps. Comme N est visiblement proportionnel à D , on a :

$$(68) \quad n^2 - 1 = CD$$

C'est la loi de Laplace qui, pour n voisin de 1, prend sensiblement la forme suivante dite de Gladstone-Dale :

$$(69) \quad n - 1 = C'D$$

Si la connaissance de la structure de l'atome ou molécule nous permet le calcul de la polarisabilité α' , la formule (67) nous donne la valeur de n^2 et par suite la loi de dispersion si α' , dépend de la fréquence du champ \vec{h} .

La théorie précédente n'est pas rigoureuse parce qu'en réalité chaque atome ou molécule de la substance considérée n'est pas soumise au champ électrique \vec{h} , mais bien à la somme de ce champ et des champs créés par la polarisation des molécules voisines. Tenant compte de cette circonstance, Lorentz a développé une théorie plus rigoureuse qui l'a conduit à la relation :

$$(70) \quad \alpha = \frac{N\alpha'}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha'}$$

au lieu de $\alpha = N\alpha'$. En portant cette valeur de α dans (64), on trouve :

$$(71) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha'.$$

Il en résulte que l'on doit avoir :

$$(72) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \text{const. } D.$$

C'est la formule de Lorentz-Lorenz qui admet les formules (68) et (69) comme formes approximatives quand n est voisin de 1.

Les formules précédentes se généralisent d'ailleurs facilement pour le cas d'un corps contenant par unité de volumes N_1 molécules d'une première espèce, N_2 d'une seconde espèce, etc.

La théorie classique a fondé sur les relations qui précèdent une interprétation de la dispersion de la lumière. Pour y parvenir, elle a admis que chaque atome contient des électrons susceptibles d'osciller autour d'une position d'équilibre sous l'action d'une force de rappel proportionnelle à l'élongation. Puis elle calcule le mouvement pris par ces oscillateurs sous l'influence d'une radiation extérieure et le moment électrique qui en résulte pour l'atome. Sous certaines conditions d'isotropie, on trouve que ce moment est proportionnel à la force électrique de l'onde incidente et l'on

en déduit la valeur du coefficient α' qui se trouve dépendre de la fréquence ν de la radiation. On en déduit par les formules précédentes la loi de dispersion. La forme de cette loi et ses vérifications expérimentales se trouvent discutées dans tous les traités d'optique physique. Nous retrouverons cette théorie de la dispersion quand nous nous occuperons de la théorie générale de la diffusion au chapitre V.

CHAPITRE II

LA THÉORIE DES QUANTA ET LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

1. Généralités sur la théorie des quanta. — On sait que les études de Planck sur le rayonnement d'équilibre thermique l'ont amené à admettre que le mouvement des particules élémentaires de matière était quantifié, c'est-à-dire à admettre que, parmi l'infinité des mouvements possibles prévus par l'ancienne Mécanique, certains seulement étaient réalisés dans la nature, ces mouvements privilégiés étant définis d'une façon assez mystérieuse par l'introduction d'une nouvelle constante universelle, la constante h de Planck.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler le rôle très important que jouait dans la théorie classique des interactions entre matière et rayonnement l'oscillateur linéaire quasi-élastique. Quand M. Planck fit l'étude des échanges d'énergie entre matière et rayonnement en équilibre thermique, il fut tout naturellement amené suivant le point de vue classique à considérer des oscillateurs électroniques linéaires comme servant d'organes pour ces échanges. C'est ainsi qu'il s'aperçut de la nécessité, pour arriver à rendre compte des lois expérimentales du rayonnement noir, de quantifier le mouvement des oscillateurs. L'oscillateur quasi-élastique possède une propriété tout à fait exceptionnelle pour un système mécanique : celle d'avoir une fréquence bien déterminée par sa seule structure et complètement indépendante de l'amplitude, de l'énergie, du mouvement. Profitant de cette circonstance, M. Planck a déterminé les mouvements quantifiés des oscillateurs de fréquence ν en admettant que les seuls mouvements possibles de ces oscillateurs étaient ceux pour lesquels l'énergie était un multiple entier du quantum d'énergie $h\nu$ suivant la formule :

$$(1) \qquad E = nh\nu \qquad (n \text{ entier})$$

Comme on le sait, cette hypothèse, très étrange du point de vue des conceptions classiques, lui a permis de trouver une formule pour la répartition spectrale des énergies dans le rayonnement d'équilibre thermique qui est en bon accord avec l'expérience, ce que ne pouvait faire la théorie classique.

La quantification par la formule (1) n'a de sens que pour l'oscillateur car elle suppose que ν est indépendant de E . Mais on peut remplacer la formule (1) par une formule qui lui est équivalente dans le cas de l'oscillateur, mais qui est susceptible de s'appliquer à d'autres cas. Dans l'oscillateur quasi élastique, en effet, la valeur moyenne de l'énergie cinétique pendant une période de mouvement est égale, on le vérifie aisément, à la valeur moyenne de l'énergie potentielle et, par suite, est égale à la moitié de l'énergie totale constante E . On a donc :

$$(2) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m v^2 dt = \frac{1}{2} E$$

m étant la masse de la charge oscillante et T la période égale à $\frac{1}{\nu}$. Comme le produit νdt est égal au chemin dx parcouru par la charge oscillante pendant le temps dt , on peut écrire (2) sous la forme :

$$(3) \quad \oint \nu m v dx = E$$

l'intégrale étant étendue à un cycle complet du mouvement. Il revient donc au même de quantifier le mouvement de l'oscillateur par la formule (1) ou par la formule équivalente

$$(4) \quad J = \oint m v dx = n h \quad (n \text{ entier})$$

où l'intégrale J n'est pas autre chose que l'intégrale d'action $\int p dq$ étendue à un cycle complet du mouvement. Mais la formule de quantification ainsi obtenue :

$$(5) \quad J = \oint p dq = n h \quad n \text{ entier}$$

qui met nettement en évidence le caractère de « quantum d'Action » possédé par la constante h , a sur la formule (1) l'avantage d'être indépendante de la propriété particulière à l'oscillateur et de pouvoir par suite être appliquée à tout système mécanique périodique dont la configuration est définie par une seule variable

q , la grandeur p étant toujours le moment conjugué de cette variable au sens de Lagrange.

Le procédé de quantification inauguré par Planck et résumé par la formule (5) a été appliqué par M. Bohr, nous le rappellerons bientôt, dans sa théorie quantique de l'atome. Il a été ensuite généralisé par M. W. Wilson et Sommerfeld pour le cas des mouvements quasi-périodiques définis par plusieurs variables dont chacune possède un cycle régulier de variation. Dans ces sortes de mouvement, il existe, du moins dans tous les cas qui interviennent dans la pratique, au moins une manière de choisir les variables q_i telle que chaque moment p_i puisse s'exprimer en fonction de la seule variable q_i qui lui est conjugué. De telles variables sont appelées des variables séparées. Pour obtenir l'expression des p_i en fonctions des q_i , on se sert des intégrales premières connues du mouvement considéré (intégrales de l'énergie, des aires, etc.). Chacune des intégrales $\oint p_i dq_i$ étendue au cycle de variation propre à la variable q_i a alors un sens bien défini et, d'après Wilson et Sommerfeld, on doit opérer la quantification du mouvement en posant :

$$(6) \quad J_i = \oint p_i dq_i = n_i h \quad (n_i \text{ entier})$$

pour chaque variable q_i . Ce mode de quantification donne bien évidemment la formule (5) dans le cas particulier d'une seule variable q . Ayant ainsi généralisé la méthode de Planck, Sommerfeld a pu trouver de remarquables formules représentant la structure fine du spectre de l'hydrogène et d'autres spectres lumineux ou Röntgen par l'emploi simultané de la Dynamique de relativité pour les électrons intraatomiques et de la formule (6) pour la quantification de leurs mouvements. Nous renvoyons à d'autres ouvrages pour l'exposé de ces questions ⁽¹⁾.

Nous venons de rappeler rapidement la méthode de quantification qui consiste à évaluer à un multiple de la constante h les périodes cycliques de l'intégrale d'Action. Nous devons maintenant exposer, en vue des applications à l'énoncé du principe de correspondance, une autre méthode de quantification, la méthode des variables angulaires, qui est souvent équivalente à la précé-

⁽¹⁾ Consulter par exemple : SOMMERFELD, *La constitution de l'atome et les raies spectrales*, traduction Bellenot, Paris, Blanchard, 1923.

dente, mais qui dans certains cas de dégénérescence soulève moins de difficultés.

Pour exposer la méthode de quantification par les variables angulaires, il faut d'abord rappeler un théorème bien connu de la Mécanique analytique classique. Supposons que, dans un problème mécanique donné, on connaisse un système de variables q_i et p_i canoniques, c'est-à-dire satisfaisant aux équations de Hamilton :

$$(7) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Le théorème en question nous apprend que, si l'on parvient à trouver un changement de variable faisant correspondre d'une façon bi-univoque des variables q_i, p_i à d'autres variables Q_i, P_i , de telle façon que $\sum_i P_i dQ_i - \sum_i p_i dq_i$ soit une différentielle exacte, les nouvelles variables Q_i, P_i satisfont aussi aux équations de Hamilton :

$$(8) \quad \frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} \quad \frac{dP_i}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}$$

où \mathcal{H} se réduit, si H ne dépend pas explicitement du temps, à la fonction qu'on obtient en exprimant $H(q_i, p_i)$ en fonction des nouvelles variables Q_i et P_i . Un tel changement de variable qui conserve la forme des équations canoniques de Hamilton, se nomme un « changement de variables canonique ».

Considérons maintenant un système quasi-périodique quantifiable et désignons par q_1, q_2, \dots un jeu de variables séparées pour ce système. On peut démontrer ⁽¹⁾ qu'il est possible d'effectuer un changement de variables canonique tel que les nouveaux moments P_i soient des constantes. Les P_i étant des constantes et les équations canoniques de Hamilton étant valables avec les nouvelles variables sous la forme (8), les $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}$ sont nuls et par suite la fonction $\mathcal{H}(Q_i, P_i)$ ne dépend pas des Q_i . Nous désignerons les variables Q_i ainsi choisies par W_i et les moments conjugués P_i par J_i . Comme on a

$$(9) \quad \frac{dW_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}$$

⁽¹⁾ On trouvera toutes ces démonstrations en détail dans le livre de M. BORN, *Vorlesungen über Atommechanik*, Berlin, Springer, 1924.

et que \mathcal{H} ne dépend pas des W_i , on voit que les $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}$ dépendant seulement des J_i sont des constantes et que, par suite, les W_i sont des fonctions linéaires du temps de la forme :

$$(10) \quad W_i = v_i t + \delta_i.$$

Bref, il est possible de trouver un changement de variables canonique faisant passer des variables primitives q_i, p_i à de nouvelles variables W_i, J_i telles que : 1° la fonction Hamiltonienne \mathcal{H} ne dépende que des J_i et non des coordonnées W_i ; 2° que les moments J_i soient des constantes; 3° que les coordonnées W_i soient des fonctions linéaires du temps de la forme (10).

Les W_i sont appelés des « variables angulaires » parce qu'elles croissent linéairement avec le temps comme l'angle dans un mouvement de rotation uniforme. Les variables conjuguées J_i ont les dimensions physiques d'une action et sont appelées les « variables d'action ». On peut démontrer que tous les q_i sont des fonctions périodiques des W_i .

Il est aisé de voir que les W_i ne sont pas jusqu'ici déterminées d'une façon unique car, si l'on a trouvé un premier jeu de variables angulaires W_i, J_i , on en trouve évidemment une infinité d'autres de la forme :

$$(11) \quad W'_i = W_i \cdot \alpha_i \quad J'_i = \frac{J_i}{\alpha_i}$$

les α_i étant des constantes arbitraires car ces nouvelles variables satisfont encore aux mêmes équations canoniques. En théorie des quanta, on lève l'indétermination des variables angulaires en choisissant les α_i de telle sorte que les q_i soient des fonctions périodiques des W_i de périodes égales à l'unité.

Quelles sont les relations entre les variables d'action J_i et les intégrales (6) définies à l'aide des variables séparées ? Si les diverses variables séparées q_i ont toutes leurs périodes incommensurables entre elles, le nombre des W_i ou des J_i est égal au nombre des q_i ou des p_i et l'on peut montrer que les variables d'action J_i sont respectivement égales aux intégrales J_i de la formule (6). Si au contraire les périodes des variables séparées q_i ne sont pas toutes incommensurables entre elles, alors le nombre des W_i ou des J_i est inférieur au nombre des q_i ou des p_i : on dit qu'il y a dégénérescence. Les variables d'action J_i sont alors des combinaisons linéaires des intégrales (6).

Revenons maintenant à la quantification. La méthode de quantification par les variables séparées consiste à écrire les équations (6). La méthode de quantification par les variables angulaires consiste à écrire que chacune des variables d'action J_i conjuguées des variables angulaires W_i est égale à un multiple entier de la constante de Planck, c'est-à-dire à poser :

$$(12) \quad J_i = n_i h \quad (n_i \text{ entier})$$

Dans le cas où il n'y a pas dégénérescence, et c'est le cas général, les conditions (12) coïncident entièrement avec les conditions (6) : les deux méthodes sont tout à fait équivalentes. Dans le cas où il y a dégénérescence, les conditions (12) sont moins nombreuses que les conditions (6) et l'on passe de (6) à (12) en remplaçant certaines des conditions (6) par une de leurs combinaisons linéaires. Dans ce cas, par conséquent, la méthode de quantification par les variables angulaires n'est pas complètement équivalente à la méthode de quantification par les variables séparées : elle impose moins de conditions de quanta au système. L'étude de la question montre que la méthode des variables angulaires est alors supérieure à la méthode des variables séparées : celle-ci impose au système des conditions quantiques surabondantes qui ne peuvent avoir de sens physique car elles varient suivant le choix des variables séparées. De plus, l'emploi des variables angulaires est, nous le verrons, nécessaire pour l'énoncé du principe de correspondance.

Pour terminer, nous allons énoncer quelques résultats importants. Désormais nous désignerons par H (au lieu de \bar{H}) la fonction Hamiltonienne exprimée à l'aide des variables d'action J_i . Nous avons alors, en vertu des équations (9) et (10) :

$$(13) \quad v_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

relation fondamentale pour le principe de correspondance.

Remarquons ensuite que les variables angulaires W_i fixent la configuration géométrique du système à chaque instant tandis que son état de mouvement est défini par les variables d'action J_i qui gardent des valeurs constantes (quelconques en Mécanique classique, quantifiées dans la théorie des quanta). Une grandeur mécanique quelconque du système envisagé étant une fonction périodique des W_i pourra se représenter par un développement de

Fourier de la forme : $\sum_{\tau_1 \dots \tau_n} c_{\tau_1 \dots \tau_n} (J_1 \dots J_n) e^{2\pi i (\tau_1 W_1 + \dots + \tau_n W_n) t}$. Si la grandeur de par sa signification physique doit être réelle, on aura $c_{-\tau_1 \dots -\tau_n} = (c_{\tau_1 \dots \tau_n})^*$, l'étoile désignant la quantité complexe conjuguée. Les W_i étant des fonctions linéaires du temps, on peut écrire ce développement de Fourier sous la forme :

$$\sum_{\tau_1 \dots \tau_n} d_{\tau_1 \dots \tau_n} (J_1 \dots J_n) e^{2\pi i (\tau_1 \nu_1 + \dots + \tau_n \nu_n) t}$$

ou symboliquement

$$(13 \text{ bis}) \quad \sum_{\tau} d_{\tau}(J) e^{2\pi i (\tau \nu) t} \quad \text{avec} \quad (\tau \nu) = \sum_i \tau_i \nu_i.$$

2. La théorie quantique de l'atome. — On sait que la théorie atomique de Bohr prend pour base le modèle planétaire de Rutherford d'après lequel l'atome d'un corps simple de nombre atomique N serait formé d'un noyau de charge électrique Ne autour duquel tourneraient N électrons. Ce modèle soulève une grave difficulté. En effet, la conception classique des oscillateurs liés à l'atome était une conception cohérente en ce sens qu'en l'absence de toute excitation extérieure, les électrons pouvaient se trouver immobiles dans leur position d'équilibre et l'état de l'atome est alors stable, tandis que dans le modèle de Rutherford-Bohr les électrons en mouvement autour du noyau central devraient rayonner de l'énergie et tomber très rapidement sur le noyau. Autrement dit, d'après la théorie classique, l'atome de Rutherford-Bohr n'est pas stable.

Pour écarter cette difficulté, M. Bohr a eu l'idée d'introduire la quantification dans le modèle planétaire de l'atome et d'admettre que dans l'atome les électrons possédaient des mouvements quantifiés non accompagnés de rayonnement, hypothèse évidemment contraire aux lois de l'électromagnétisme classique.

Pour quantifier les systèmes atomiques à la façon de Bohr, on peut chercher à déterminer pour chaque sorte d'atomes les variables angulaires et à écrire les équations (12). Mais ceci n'est effectivement possible que dans quelques cas simples tels que celui de l'atome d'hydrogène où il n'y a qu'un électron-planète. Dans les autres cas, on doit, pour obtenir une solution approximative, faire des hypothèses simplificatrices plus ou moins justifiées.

Quoi qu'il en soit, dans les cas où le problème peut être rigoureusement résolu, la fonction Hamiltonienne du système atomique s'exprime à l'aide des seules variables J_i et l'on doit écrire pour ces variables les conditions (12) : chaque état « stationnaire » quantifié du système atomique est donc défini par un jeu de nombres quantiques n_1, \dots, n_i, \dots et possède une énergie $E_{n_1, \dots, n_i, \dots}$ que nous désignerons plus brièvement par E_n en désignant par n l'ensemble des nombres quantiques de cet état. Il est alors évident que l'on obtiendra la valeur E_n en substituant à chaque J_i la valeur $n_i h$ dans l'expression Hamiltonienne $H(J_1, \dots, J_i, \dots)$. Ainsi dans le cas de l'atome d'hydrogène ⁽¹⁾ on trouve qu'il suffit d'introduire une seule variable angulaire W pour caractériser le mouvement de l'électron-planète : cette variable n'est pas autre chose que l'anomalie moyenne de la trajectoire elliptique Képlerienne de l'électron, anomalie moyenne qui, on le sait, croît proportionnellement au temps, fait en accord avec la théorie générale des variables angulaires. Le moment conjugué de l'anomalie moyenne est égal au moment de la quantité de mouvement par rapport au noyau (supposé assez lourd pour ne pas subir sensiblement la réaction de l'électron et rester immobile) multiplié par la constante 2π . Ce moment conjugué J reste donc constant en vertu du théorème des aires et ceci aussi est en accord avec la théorie générale des variables angulaires. Un calcul facile, analogue à un calcul classique de Mécanique céleste, montre que la fonction Hamiltonienne $H(J)$ s'écrit ici :

$$(14) \quad H(J) = - \frac{2\pi^2 m e^4}{J^2}$$

e et m étant la charge électrique et la masse de l'électron. Si donc on quantifie en posant J égal à n fois h , on trouve pour l'énergie de l'état stationnaire caractérisé par le nombre quantique n :

$$(15) \quad E_n = H(nh) = - \frac{2\pi^2 m e^4}{n^2 h^2}$$

C'est la formule classique donnant l'énergie des états stationnaires de l'atome d'hydrogène dans la théorie primitive de Bohr.

A côté de la quantification, M. Bohr a introduit dans sa théorie de l'atome un autre principe directeur très important : c'est sa « loi des fréquences ». Bohr admet que l'atome est susceptible de

⁽¹⁾ BORN, *loc. cit.*, p. 158.

subir des « transitions » ou sauts brusques qui le font passer spontanément d'un état stationnaire à un autre de moindre énergie avec émission d'un rayonnement monochromatique et la loi des fréquences consiste en ceci que ce rayonnement est émis sous forme d'un quantum $h\nu$ égal à l'énergie perdue par l'atome pendant la transition ; cette loi est donc la résultante de la structure quantifiée de la lumière et de la conservation de l'énergie. Si l'on désigne par $\nu_{nn'}$ la fréquence du rayonnement émis lors du passage de l'état d'énergie E_n à l'état d'énergie $E_{n'} < E_n$, la loi des fréquences s'exprime par la formule :

$$(16) \quad \nu_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$$

Inversement si une radiation de fréquence $\nu_{nn'}$ tombe sur un atome dans l'état stationnaire d'énergie $E_{n'}$, il pourra y avoir transition de l'atome depuis cet état jusqu'à l'état d'énergie E_n avec absorption d'un quantum $h\nu_{nn'}$. La possibilité de ce processus d'absorption est d'ailleurs nécessaire, si l'on admet le processus d'émission proposé par Bohr, afin que soit satisfait le principe de la réversibilité des processus élémentaires (principe de la balance détaillée).

La loi (16) est conforme au principe de combinaison de Ritz suivant lequel il existe, pour chaque sorte d'atome des « termes spectraux » tels que toutes les fréquences émises par cette sorte d'atome soient toujours égales à la différence de deux des termes spectraux. Les termes spectraux apparaissent ici comme étant les quotients par h des énergies des divers états stationnaires dont est susceptible l'atome considéré.

Appliquée à l'atome d'hydrogène, la loi des fréquences nous donne, d'après (15), pour les fréquences du spectre atomique de l'hydrogène :

$$(17) \quad \nu_{nn'} = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > n')$$

En particulier, en faisant dans cette formule $n' = 2$, $n > 2$, on obtient une série de raies que l'on peut identifier avec la série de Balmer pour laquelle les fréquences des raies sont données par la loi empirique de Balmer depuis longtemps connue :

$$(18) \quad \nu_n = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n > 2)$$

Il suffit pour faire cette identification de supposer que la constante R est égale à $\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}$; or cette constante, la constante de Rydberg, est très exactement connue par les mesures spectroscopiques et elle est bien très sensiblement égale à $\frac{2\pi^2 me^4}{h^2}$. On connaît aussi dans le spectre de l'hydrogène atomique des séries qui correspondent à la formule générale (17) quand on y fait n' égal à 1,3 ou 4.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie de Bohr dont on trouvera une étude plus approfondie dans de nombreux ouvrages et nous allons parler du principe de correspondance dont l'importance est fondamentale pour l'étude des interactions entre matière et rayonnement.

3. Le principe de correspondance. — L'idée de base de la méthode de correspondance développée par Bohr en 1916 est la suivante : l'écart entre les théories classiques et les théories quantiques a pour raison essentielle la valeur finie de la constante h de Planck et s'évanouirait si cette valeur tendait vers zéro. Donc, en particulier, dans les phénomènes mettant en jeu un nombre énorme de quanta d'action, on doit retrouver asymptotiquement les résultats de la théorie classique puisqu'alors tout se passe comme si h était infiniment petit. En d'autres termes, les théories classiques ont été construites pour représenter des phénomènes à grande échelle où interviennent un nombre considérable de quanta d'action et, comme elles ont été vérifiées pour ces phénomènes, les théories quantiques, où l'on tient compte de la discontinuité de l'action, doivent les retrouver comme cas limites valables pour les grands nombres de quanta.

Pour éprouver la valeur de cette idée générale, on peut d'abord montrer qu'il en est bien ainsi pour les fréquences si l'on admet la loi (16) de Bohr. On obtient ainsi ce que nous appellerons le théorème de correspondance pour les fréquences.

Pour démontrer ce théorème, nous considérerons un certain système mécanique et un mouvement classique de ce système défini par certaines valeurs constantes (non quantifiées) des variables d'action $J_1 \dots J_n$. Le moment électrique du système dans cet état de mouvement est une fonction vectorielle de sa

configuration à chaque instant et, par suite, admet d'après (13 bis) un développement de forme :

$$(19) \quad \vec{\mathcal{F}} = \sum_{\tau} \vec{p}_{\tau}(J) e^{2\pi i(\tau\nu)t}$$

où τ représente l'ensemble des nombres entiers $\tau_1 \dots \tau_n$ et J l'ensemble des variables d'action et où $(\tau\nu) = \sum_i \nu_i \tau_i$.

Supposons maintenant que ce mouvement quantifié correspond à de grands nombres de quanta, c'est-à-dire que chaque J_k soit égal à $n_k h$, n_k étant un nombre entier très grand devant l'unité. D'après la théorie classique, il y aurait émission *simultanée* de toutes les fréquences de la forme $\sum_i \tau_i \nu_i$, l'émission de

l'onde de fréquence $(\tau\nu)$ étant proportionnelle à $|p_{\tau}(J)|^2$. D'après la théorie des quanta, au contraire, il y a possibilité de transitions de l'état considéré vers d'autres états d'énergie moindre et pour la transition faisant passer le système de l'état défini par les $J_k = n_k h$ à l'état défini par les $J_k = n'_k h$, la fréquence émise sera d'après la loi de Bohr :

$$(20) \quad \nu_{nn'} = \frac{1}{h} (E_n - E_{n'})$$

où n et n' symbolisent l'ensemble des n_i et des n'_i respectivement.

Or d'après l'idée fondamentale de la correspondance, si les n_k sont grands et si les variations $\delta n_k = n_k - n'_k$ de ces nombres quantiques pour la transition considérée sont petites devant les n_k , on doit retrouver sensiblement les prévisions de la théorie classique. Les J_k variant peu en valeur relative dans la transition $n_k \rightarrow n'_k$ on peut écrire pour la variation correspondante de l'énergie :

$$(21) \quad E_n - E_{n'} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial J_k} \delta J_k$$

et par suite d'après (16) et (13) puisque $\delta J_k = h \cdot \delta n_k$:

$$(22) \quad \nu_{nn'} = \sum_k \frac{\partial H}{\partial J_k} \frac{\delta J_k}{h} = \sum_k \nu_k \delta n_k$$

Nous pouvons donc faire « correspondre » au terme de fréquence $\tau_1 \nu_1 \dots + \tau_n \nu_n$ de l'expression classique (19) de $\vec{\mathcal{F}}$ la transition quantique $(n_1 n_2 \dots n_n) \rightarrow (n_1 - \tau_1 \dots n_n - \tau_n)$ puisque cette transition quan-

tique donne lieu à l'émission de la fréquence $\tau_1\nu_1 + \dots + \tau_n\nu_n$ comme le montre la formule (22). Ainsi nous trouvons bien, en conformité avec l'idée de base de la méthode de correspondance, que les fréquences prévues par application de la loi de Bohr tendent asymptotiquement pour les grands nombres quantiques vers les fréquences prévues par la théorie classique. C'est le théorème de correspondance pour les fréquences.

Le théorème précédent justifiant la méthode de correspondance, on est fondé à le généraliser. C'est ce qu'a fait M. Bohr en énonçant son principe de correspondance pour les intensités et les polarisations. Pour l'énoncer, nous considérerons un très grand nombre N d'atomes identiques, orientés parallèlement et se trouvant tous dans le même état quantique défini par des valeurs $J_k = n_k h$ des variables d'action, les n_k étant des entiers très grands devant l'unité. D'après la théorie classique, chacun de ces atomes devrait émettre toutes les fréquences de la forme $\sum_k \tau_k \nu_k = \sum_k \tau_k \frac{\partial H}{\partial J_k}$ avec des τ_k entiers, l'intensité de la composante parallèle à l'axe des x de la radiation de fréquence $(\tau\nu)$ étant proportionnelle à $|p_\tau^{(x)}|^2$. Plus précisément, la quantité d'énergie rayonnée par unité de temps sous forme d'une radiation de fréquence $(\tau\nu)$ dont le vecteur électrique vibre parallèlement à ox est égale par atome à l'expression :

$$\frac{64\pi^4(\tau\nu)^4}{3c^3} |p_\tau^{(x)}|^2$$

Ceci résulte de la formule (51) du chapitre I.

Un observateur qui analyserait le rayonnement émis suivant la théorie classique par les N atomes y verrait donc toutes les fréquences de la forme $\sum_k \tau_k \nu_k$, les intensités et les polarisations de chacune d'elles étant définies par la loi qui vient d'être énoncée. Mais dans la conception quantique les choses se présentent tout différemment. Chacun des N atomes ne peut en effet, selon elle, émettre qu'une seule des fréquences $(\tau\nu)$ en accomplissant la transition $n \rightarrow n - \tau$ correspondante. On doit donc dire ici que chaque atome a une certaine probabilité $P_{n,n-\tau}$ d'effectuer l'émission de la fréquence $(\tau\nu)$. Dès lors, N étant par hypothèse très grand, il y aura par seconde $NP_{n,n-\tau}$ atomes en moyenne qui émet-

tront un quantum $h(\tau\nu)$. L'observateur qui observe ce rayonnement sans pouvoir préciser le rôle de chaque atome voit donc dans ce rayonnement toutes les fréquences de la forme $(\tau\nu)$ avec les intensités respectives $NP_{n,n-\tau}h(\tau\nu)$. Mais l'idée de correspondance nous conduit alors à *postuler* que, dans le domaine des grands nombres quantiques, les faits observés doivent être en accord avec la théorie classique, c'est-à-dire que l'intensité quantique réelle $NP_{n,n-\tau}h(\tau\nu)$ doit être égale à l'expression classique $\frac{N \cdot 64\pi^4(\tau\nu)^4}{3c^3} |p_\tau|^2$. D'où l'on déduit la valeur de la probabilité $P_{n,n-\tau}$:

$$(23) \quad P_{n,n-\tau} = \frac{1}{h(\tau\nu)} \frac{64\pi^4(\tau\nu)^4}{3c^3} |p_\tau|^2 = \frac{64\pi^4(\tau\nu)^3}{3hc^3} |p_\tau|^2$$

On peut encore préciser en disant que la probabilité $P_{n,n-\tau}^{(x)}$ par unité de temps et par atome de l'émission d'une radiation de fréquence $(\tau\nu)$ dont le champ électrique vibre parallèlement à l'axe des x est :

$$(24) \quad P_{n,n-\tau}^{(x)} = \frac{64\pi^4(\tau\nu)^3}{3hc^3} |p_\tau^{(x)}|^2$$

avec formules analogues en y et en z .

Par ce principe, la théorie de correspondance détermine avec précision les probabilités de transition, et par conséquent les intensités et les polarisations des radiations émises, dans le domaine des grands nombres quantiques tels que :

$$(25) \quad n_k \gg 1 \quad n'_k \gg 1 \quad |\delta n_k| = (n_k - n'_k) \ll n_k$$

Mais M. Bohr a hardiment été plus loin. Il a étendu par extrapolation ce principe de correspondance en dehors du domaine défini par les inégalités (25). Il a postulé que, pour toute transition quantique $n \rightarrow n'$, il est encore possible de poser :

$$(26) \quad P_{nn'}^{(x)} = \frac{64\pi^4\nu^3}{3hc^3} |p_\tau^{(x)}|^2$$

ν étant ici la fréquence de la radiation réellement émise lors de la transition et donnée par la loi des fréquences, cette fréquence ne coïncidant d'ailleurs plus en général avec aucun des $(\tau\nu)$ du développement classique du moment électrique \vec{x} de l'état initial en série de Fourier. Dans (26), on suppose que la quantité $p_\tau^{(x)}$ est égale (ou du moins reliée) au coefficient du terme en $e^{2\pi i(\tau\nu)t}$, dans le développement du \mathfrak{X}_x en série de Fourier, pour lequel les

τ_k sont égaux aux δn_k de la transition envisagée. Sous cette forme aujourd'hui périmée, le principe n'est d'ailleurs pas d'un énoncé très précis. En effet, si l'on considère le mouvement quantifié initial, le moment électrique $\vec{\mathcal{E}}$ correspondant peut se développer classiquement en série de Fourier et les \vec{p}_τ sont bien déterminés, mais pour le mouvement final après la transition, on a des \vec{p}_τ différents. Doit-on alors, pour appliquer le principe, prendre les \vec{p}_τ initiaux ou les \vec{p}_τ finaux ou bien encore une sorte de moyenne entre les deux ? Pour les grands nombres quantiques, c'est-à-dire dans le domaine défini par les inégalités (25), cette indétermination est sans importance car les $\vec{p}_\tau(J)$ étant des fonctions continues des variables J et ces variables variant extrêmement peu en valeur relative pendant une transition en vertu de (25), les \vec{p}_τ finaux diffèrent très peu des \vec{p}_τ initiaux. Mais il n'en est pas de même pour les nombres quantiques moyens et petits, c'est-à-dire en dehors du domaine défini par les inégalités (25) ; le principe de Bohr est alors affecté d'une indétermination qui n'a été vraiment levée que par les nouvelles Mécaniques.

Néanmoins, bien qu'imparfait, le principe de correspondance ainsi énoncé par Bohr dans le cadre de l'ancienne théorie des quanta a tout de suite rendu des services en permettant des prévisions exactes pour les intensités et les polarisations des raies spectrales et en fournissant une démonstration des règles de sélection. S'il se trouve en effet que l'intensité de certaines raies prévues par la loi des fréquences soit nulle, ces raies ne se manifesteront pas réellement dans les spectres. On obtient ainsi des « règles de sélection » permettant de prévoir quelles sont parmi les raies données par la loi de Bohr celles qui figurent effectivement dans le spectre de l'atome considéré. Les règles de sélection obtenues par le principe de correspondance concordent bien avec celles que M. Rubinovicz avait antérieurement énoncées en partant de considérations sur le moment de quantité de mouvement des ondes lumineuses.

Guidés par l'idée de correspondance, les théoriciens de l'école de Copenhague, élèves de M. Bohr, sont parvenus à développer des théories parfois un peu bâtarde, mais qui ont été très utiles parce qu'elles ont préparé la voie aux théories actuelles. C'est ainsi

que MM. Kramers et Heisenberg sont parvenus à la première théorie quantique de la dispersion et à la formule qui porte leur nom dont nous aurons à reparler. Partant de là et toujours guidé par la méthode de correspondance, M. Heisenberg a développé avec beaucoup d'originalité sa théorie des matrices que nous esquisserons au chapitre suivant.

4. L'effet Zeeman et les règles de sélection. — Pour donner un exemple simple d'application des coordonnées angulaires et de démonstration des règles de sélection, nous indiquerons ici rapidement la théorie quantique de l'effet Zeeman en nous bornant au cas d'un atome à un seul électron (atome d'hydrogène ou hydrogénoïde).

Considérons un atome à un seul électron placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathcal{H}}$. Un théorème célèbre de Sir J. Larmor, dont on trouvera la démonstration dans tous les traités classiques d'électromagnétisme, nous apprend que, pour les valeurs des champs électromagnétiques usuellement réalisables, le mouvement de l'électron peut s'obtenir de la façon suivante : « Imaginons un système de référence qui tourne autour de la direction du champ magnétique avec la vitesse angulaire uniforme :

$$(27) \quad \omega = \frac{e\mathcal{H}}{2mc} \quad (— e = \text{charge de l'électron, } m \text{ sa masse}).$$

(dite vitesse de rotation de Larmor) ; alors le mouvement de l'électron par rapport à ce système est le même que si le champ magnétique n'existait pas et si le système ne tournait pas. » Il y a en somme compensation entre l'effet du champ magnétique et celui de la rotation du système.

Cela étant, l'électron atomique soumis à la force Coulombienne émanant du noyau décrira une ellipse Képlérienne tournant avec la vitesse ω autour de la direction du champ magnétique. Dans le système de référence tournant de Larmor, nous pouvons donc toujours définir une anomalie moyenne, que nous appellerons ici W_1 , qui croîtra proportionnellement au temps et sera une variable angulaire conjuguée du moment de quantité de mouvement J_1 par rapport au centre de l'ellipse dans le système tournant. Mais maintenant pour fixer la position de l'électron à un instant donné, il faudra encore connaître un angle φ fixant la position du système de référence tournant par rapport à un système de référence fixe.

Cet angle est l'azimut mesurant la rotation du système de Larmor à partir d'une certaine position : il augmente proportionnellement au temps avec la vitesse angulaire ω . On obtient donc une deuxième variable angulaire en divisant φ par 2π car nous savons que la configuration du système doit être une fonction périodique de chaque variable angulaire avec une période égale à l'unité. Nous poserons donc :

$$(28) \quad \omega_2 = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} t + \delta_2 = \nu_2 t + \delta_2 \quad \text{avec} \quad \nu_2 = \frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc}$$

Le moment conjugué J_2 est le moment de quantité de mouvement de l'électron autour de la direction du champ magnétique : c'est une constante. Si maintenant nous voulons former l'expression Hamiltonienne de l'énergie $H(J_1, J_2)$ qui ne doit dépendre que des variables J , nous devons y trouver d'abord le terme $-\frac{2\pi^2 me^4}{J_1^2}$, correspondant d'après la formule (14) au mouvement Képlérien relatif dans le système tournant, augmenté d'un terme dépendant de J_2 qui doit s'annuler en même temps que \mathcal{H} . On peut obtenir ce second terme en se souvenant que l'on doit avoir :

$$(29) \quad \nu_2 = \frac{\partial H(J_1, J_2)}{\partial J_2}$$

d'où par intégration, puisque ν_2 ne dépend pas de J_2 :

$$(30) \quad H(J_1, J_2) = \nu_2 J_2 + f(J_1) = -\frac{2\pi^2 me^4}{J_1^2} + \frac{e\mathcal{H}J_2}{4\pi mc}$$

Pour quantifier, on doit poser : $J_1 = nh$ et $J_2 = mh$. On obtient alors :

$$(31) \quad E_{n,m} = -\frac{2\pi^2 me^4}{n^2 h^2} + m \frac{eh\mathcal{H}}{4\pi mc}$$

D'où pour la fréquence émise lors de la transition $(n, m) \rightarrow (n', m')$:

$$(32) \quad \begin{aligned} \nu_{nm, n'm'} &= \frac{E_{n,m} - E_{n',m'}}{h} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) + (m - m') \frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc} \\ &= \nu_{nn'}^0 + \delta m \cdot \frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc} \end{aligned}$$

$\nu_{nn'}^0$, étant la fréquence qui serait émise lors de cette transition s'il n'y avait pas de champ magnétique. La quantité $\frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc}$ est l'écart

normal de Lorentz. *A priori*, δm est un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul. Le principe de correspondance, en nous fournissant une règle de sélection applicable au problème présent, va nous permettre de restreindre les valeurs possibles de δm et de retrouver ainsi exactement les doublets et les triplets de la théorie classique de Lorentz.

En effet, d'après le théorème de Larmor, l'atome possède dans le système de référence tournant le même moment électrique $\vec{\mathcal{E}}^0$ qu'il aurait dans un système fixe en l'absence de champ magnétique. Prenons un système d'axes fixes dont l'axe des z coïncide avec la direction du champ $\vec{\mathcal{H}}$ et un autre système d'axes animé de la rotation de Larmor avec même direction de l'axe des z . Soit $oxyz$ le premier système, $ox'y'z'$ le second. L'angle $\varphi = \omega t + 2\pi\delta_2$ précédemment introduit est l'angle entre ox et ox' : par un choix convenable de l'origine des temps, on peut d'ailleurs faire δ_2 nul, ce que nous supposons.



Fig. 3.

Nous aurons alors à chaque instant les relations :

$$(33) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \mathcal{E}_x^0 \cos \varphi - \mathcal{E}_y^0 \sin \varphi; & \mathcal{E}_y &= \mathcal{E}_x^0 \sin \varphi + \mathcal{E}_y^0 \cos \varphi; \\ \mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_z^0 \end{aligned}$$

qui nous donnent les composantes du moment électrique $\vec{\mathcal{E}}$ de l'atome dans le système fixe. De (33), on déduit :

$$(34) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y &= (\mathcal{E}_x^0 + i\mathcal{E}_y^0)e^{i\varphi}; & \mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y &= (\mathcal{E}_x^0 - i\mathcal{E}_y^0)e^{-i\varphi}; \\ \mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_z^0 \end{aligned}$$

En introduisant alors la variable angulaire $W_2 = \frac{\varphi}{2\pi} = \nu_2 t$, il vient :

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y &= (\mathcal{E}_x^0 + i\mathcal{E}_y^0)e^{2\pi i\nu_2 t}; & \mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y &= (\mathcal{E}_x^0 - i\mathcal{E}_y^0)e^{-2\pi i\nu_2 t}; \\ \mathcal{E}_z &= \mathcal{E}_z^0 \end{aligned}$$

Or à la variable angulaire W_2 , correspond, nous le savons, la variable d'action J_2 égale au moment de quantité de mouvement de l'électron autour de oz et le nombre quantique m . D'après la cor-

respondance entre les transitions quantiques et le développement en série de Fourier du moment électrique, on voit que les seules transitions associées à un moment électrique non nul sont celles pour lesquelles on a :

$$\delta m = \pm 1 \text{ ou } 0$$

car $\mathcal{E}_x^0 \pm i\mathcal{E}_y^0$ sont évidemment indépendants de la variable W_1 .

Aux transitions pour lesquelles $\delta m = +1$, correspond un moment électrique, tel que $\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y \neq 0$; $\mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y = 0$; $\mathcal{E}_z = 0$, c'est-à-dire un moment électrique contenu dans le plan xoy dont les composantes \mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y sont déphasées de $\frac{\pi}{2}$; à ce moment correspond l'émission d'une onde circulaire gauche. Aux transitions pour lesquelles $\delta m = -1$, correspond un moment électrique tel que $\mathcal{E}_x + i\mathcal{E}_y = 0$, $\mathcal{E}_x - i\mathcal{E}_y \neq 0$, $\mathcal{E}_z = 0$, c'est-à-dire un moment électrique contenu dans le plan xoy et dont les composantes \mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y sont déphasées de $-\frac{\pi}{2}$: il lui correspond l'émission d'une onde circulaire droite. Enfin aux transitions pour lesquelles $\delta m = 0$, correspond un moment électrique tel que $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0$, $\mathcal{E}_z \neq 0$, c'est-à-dire un moment dirigé suivant oz : à ce moment est liée l'émission d'une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique est parallèle à oz .

Revenons maintenant à la formule (32). Nous voyons qu'en présence du champ magnétique uniforme $\vec{\mathcal{H}}$, nous avons l'émission : 1° d'une raie spectrale de fréquence non modifiée par la présence du champ dont la vibration électrique est parallèle à oz ($\delta m = 0$); 2° d'une raie à polarisation circulaire gauche dans le plan xoy dont la fréquence augmentée par la présence du champ est $\nu_{nn'}^0 + \frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc}$ ($\delta m = 1$); 3° d'une raie à polarisation circulaire droite dans le plan xoy dont la fréquence diminuée par la présence du champ est $\nu_{nn'}^0 - \frac{e\mathcal{H}}{4\pi mc}$ ($\delta m = -1$). Les autres valeurs de δm ($|\delta m| > 2$) correspondent à des raies d'intensité nulle c'est-à-dire ne se manifestant pas réellement. On retrouve ainsi entièrement la théorie classique de l'effet Zeeman normal. L'ancienne théorie des quanta, pas plus que la théorie classique, n'interprète les effets Zeeman anormaux. Il a fallu l'introduction du « spin » de l'électron et la théorie de Dirac pour le faire d'une manière satisfaisante.

CHAPITRE III

LES NOUVELLES MÉCANIQUES ET LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

1. La Mécanique quantique d'Heisenberg. — En 1925, M. W. Heisenberg a développé des conceptions entièrement nouvelles concernant la manière de représenter les grandeurs physiques caractérisant l'atome. Dans la conception primitive de l'atome de Bohr, on se représentait l'électron atomique comme ayant une position, une vitesse et une trajectoire bien définies, mais en fin de compte, tous ces éléments ne servaient que d'intermédiaires de calcul. En particulier, la fréquence de révolution de l'électron sur son orbite, qui, d'après la théorie classique, devrait déterminer les fréquences émises ou absorbées, n'est pas observable. Les fréquences réellement observées dans les spectres d'émission et d'absorption, ainsi que les fréquences critiques des courbes de dispersion, sont les fréquences déterminées par la loi de Bohr et, en dehors du domaine des grands nombres quantiques, ces fréquences observables n'ont aucune relation simple avec les fréquences de révolution des électrons calculées par la théorie de Bohr. L'idée fondamentale de M. Heisenberg a été que la théorie de l'atome devait faire abstraction de toutes les grandeurs qui ne sont pas observables et caractériser l'atome uniquement par des éléments observables tels que les fréquences, les intensités et les états de polarisation des raies spectrales qu'il peut émettre. D'autre part, il s'est aussi laissé guider par le principe de correspondance et ces deux idées directrices l'ont conduit à sa mécanique des matrices.

Nous avons vu que, dans la théorie classique, la composition spectrale du rayonnement émis par un système est déterminée par le développement en série de Fourier du moment électrique $\vec{\mathcal{E}}$ de ce système. Supposons par exemple qu'un atome soit cons-

titué par des particules électrisées de charges e_1, \dots, e_k, \dots . Repérons la position de ces particules dans un certain système de coordonnées cartésiennes et désignons par q l'une quelconque des coordonnées x, y, z . La k^{e} particule a la coordonnée q_k . Soit alors \mathcal{F}_q la composante du moment électrique de l'atome suivant l'axe q . On a par définition :

$$(1) \quad \mathcal{F}_q = \sum_k e_k q_k.$$

Or chaque q_k pouvant se développer sous la forme :

$$(2) \quad q_k = \sum_{\tau} q_{\tau}^{(k)} e^{2\pi i(\tau\nu)t} \quad (q_{-\tau}^{(k)} = q_{\tau}^{(k)*})$$

avec les notations introduites au chapitre précédent, on a :

$$(3) \quad \mathcal{F}_q = \sum_k \sum_{\tau} e_k q_{\tau}^{(k)} e^{2\pi i(\tau\nu)t} = \sum_{\tau} \mathcal{F}_{\tau}^{(q)} e^{2\pi i(\tau\nu)t}$$

en posant :

$$(4) \quad \mathcal{F}_{\tau}^{(q)} = \sum_k e_k q_{\tau}^{(k)}.$$

D'après la théorie classique, l'atome ainsi constitué émet toutes les fréquences $(\tau\nu)$, l'énergie rayonnée par seconde sous forme de radiation de fréquence $(\tau\nu)$ avec vibration électrique parallèle à l'axe des q étant $\frac{64\pi^4(\tau\nu)^4}{3c^3} \left| \sum_k e_k q_{\tau}^{(k)} \right|^2$.

Dans la théorie quantique par contre, l'atome est susceptible d'une série d'états quantifiés caractérisés chacun par un ensemble de nombres quantiques n_1, \dots, n_n . Quand l'atome passe de l'état caractérisé par les nombres quantiques n à l'état caractérisé par les nombres quantiques n' , il y a émission de la fréquence $\nu_{nn'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$. Un ensemble d'atomes identiques et de même orientation émet toutes les fréquences $\nu_{nn'}$ prévues par la règle de Bohr et l'énergie rayonnée en une unité de temps par cet ensemble sous forme de radiation de fréquence $\nu_{nn'}$ avec vibration électrique parallèle à l'axe des q a une certaine valeur observable qu'on peut exprimer en disant que cette énergie rayonnée est égale en moyenne par atome à $\frac{64\pi^4\nu_{nn'}^4}{3c^3} \left| \sum_k e_k q_{nn'}^{(k)} \right|^2$, la valeur des $q_{nn'}^{(k)}$ étant fournie par l'expérience. Ainsi on peut caractériser entière-

ment le spectre de l'atome, avec la fréquence, l'intensité et l'état de polarisation de ses diverses raies, en donnant l'ensemble des $q_{nn'}^{(k)}$ et des $\nu_{nn'}$. On peut donc, et ce fut le point de départ très original d'Heisenberg, représenter l'atome considéré par un ensemble de quantités complexes de la forme $q_{nn'}^{(k)} e^{2\pi i \nu_{nn'} t}$ où ne figurent que des grandeurs reliées directement aux données spectroscopiques. Ces quantités complexes ne sont pas les termes d'un développement en série de Fourier ; néanmoins, guidé par le principe de correspondance, on peut les comparer aux termes du développement classique (2). Cette comparaison a conduit M. Heisenberg à admettre que les $q_{nn'}^{(k)}$ satisfont à la relation :

$$(5) \quad q_{nn'}^{(k)} = q_{n'n}^{(k)*}.$$

Cette relation se déduit, en effet, par correspondance de la relation $q_{-\tau}^{(k)} = q_{\tau}^{(k)*}$ que satisfont les termes du développement classique (2) car, d'après le théorème de correspondance pour les fréquences, τ correspond à $n - n'$, — τ à $n' - n$ et par suite $q_{nn'}^{(k)}$ correspond à $q_{\tau}^{(k)}$ et $q_{n'n}^{(k)}$ correspond à $q_{-\tau}^{(k)}$.

Ainsi, à chaque coordonnée q_k , Heisenberg fait correspondre un ensemble de nombres complexes dont on peut dresser un tableau, les nombres n et n' servant à définir les lignes et les colonnes de ce tableau. C'est une matrice au sens des mathématiciens et l'on dit que cette matrice est hermitique (ou hermitienne) parce que ses éléments satisfont à la relation :

$$(6) \quad q_{nn'}^{(k)} e^{2\pi i \nu_{nn'} t} = (q_{n'n}^{(k)} e^{2\pi i \nu_{n'n} t})^*$$

car $\nu_{n'n} = -\nu_{nn'}$ d'après la loi des fréquences de Bohr et $q_{nn'}^{(k)} = q_{n'n}^{(k)*}$ d'après l'hypothèse (5).

Nous pouvons maintenant généraliser et admettre avec Heisenberg que toute grandeur A caractérisant la configuration ou l'état de mouvement de l'atome doit être représentée dans la nouvelle théorie par un ensemble de nombres complexes $a_{nn'} e^{2\pi i \nu_{nn'} t}$ où les $\nu_{nn'}$ sont les fréquences de Bohr pour cet atome et où $a_{nn'} = a_{n'n}^*$. Autrement dit, toute grandeur atomique A est représentée par un matrice hermitique.

Grâce à une autre analogie avec la théorie classique, Heisenberg

est parvenu à une règle importante concernant les matrices de la nouvelle Mécanique : la règle de multiplication. Pour y parvenir, considérons les développements classiques en série de Fourier de deux grandeurs atomiques A et B.

$$(7) \quad A = \sum_{\tau} a_{\tau} e^{2\pi i(\tau\nu)t}; \quad B = \sum_{\tau'} b_{\tau'} e^{2\pi i(\tau'\nu)t}$$

écrits avec les conventions précédemment adoptées. Peut-on développer le produit AB de la même façon ? La réponse est affirmative car on a :

$$(8) \quad AB = \sum_{\tau} a_{\tau} e^{2\pi i(\tau\nu)t} \cdot \sum_{\tau'} b_{\tau'} e^{2\pi i(\tau'\nu)t} = \sum_{\tau\tau'} a_{\tau} b_{\tau'} e^{2\pi i((\tau+\tau')\nu)t}$$

et en posant $\tau + \tau' = \sigma$, on peut écrire

$$(9) \quad AB = \sum_{\sigma} (ab)_{\sigma} e^{2\pi i(\sigma\nu)t}$$

avec la définition :

$$(10) \quad (ab)_{\sigma} = \sum_{\tau} a_{\tau} b_{\sigma-\tau}.$$

Ceci nous fournit la règle permettant d'obtenir le coefficient d'indice σ du développement en série de Fourier de AB quand on connaît le développement de Fourier de A et de B. Comment pouvons-nous transposer ces considérations dans la théorie quantique ? En théorie quantique, nous devons faire correspondre aux deux grandeurs A et B deux tableaux de nombres complexes suivant le schéma :

$$(11) \quad A \sim a_{nn'} e^{2\pi i\nu_{nn'}t}; \quad B \sim b_{nn'} e^{2\pi i\nu_{nn'}t}.$$

Si nous voulons faire correspondre au produit AB une représentation du même type, soit

$$(12) \quad AB \sim (ab)_{nn'} e^{2\pi i\nu_{nn'}t},$$

nous aurons à faire correspondre dans la formule (10) σ à $n - n'$ c'est-à-dire à la paire d'indices nn' , τ à $n - l$, c'est-à-dire à la paire d'indices nl , enfin $\sigma - \tau$ à $n - n' - (n - l) = l - n'$ c'est-à-dire à la paire d'indices ln' . Par correspondance, la formule (10) se transposera donc sous la forme :

$$(13) \quad (ab)_{nn'} = \sum_l a_{nl} b_{ln'}.$$

Or c'est précisément là la formule ordinaire de multiplication des matrices algébriques. De la formule (13) résulte qu'en général la matrice BA ne coïncide pas avec la matrice AB : pour les matrices, il n'y a pas en général commutativité de la multiplication.

Remarquons qu'on peut aussi écrire :

$$(14) \quad (ab)_{nn'} e^{2\pi i \nu_{nn'} t} = \sum_l a_{nl} e^{2\pi i \nu_{nl} t} \cdot b_{ln'} e^{2\pi i \nu_{ln'} t}$$

car d'après la loi des fréquences, on a :

$$(15) \quad \nu_{nn'} = \frac{1}{h} (E_n - E_{n'}) = \frac{1}{h} [E_n - E_l] + \frac{1}{h} [E_l - E_{n'}] = \nu_{nl} + \nu_{ln'}.$$

Cette remarque montre la cohérence de la loi des fréquences de Bohr avec le calcul des matrices.

Par des considérations que nous ne développerons pas ici, M. Heisenberg est parvenu à montrer que, si Q et P sont les matrices représentant deux grandeurs canoniquement conjuguées, la méthode de correspondance conduit à poser :

$$(16) \quad PQ - QP = -\frac{h}{2\pi i} \cdot 1.$$

1 représentant la matrice unité dont les termes diagonaux sont tous égaux à un, les termes non diagonaux étant tous nuls. La relation (16) signifie que l'élément d'indices nn' de la matrice $PQ - QP$ est nul si $n \neq n'$ et égal à $-\frac{h}{2\pi i}$ si $n = n'$. La matrice $PQ - QP$ est donc une matrice diagonale (c'est-à-dire dont les éléments non diagonaux sont nuls) dont les termes diagonaux ont tous la même valeur $-\frac{h}{2\pi i}$.

Plus généralement si, dans un problème quantique, les variables canoniques de position sont $q_1 \dots q_n$ et les moments conjugués $p_1 \dots p_n$, on a entre les matrices correspondantes les relations :

$$(17) \quad P_i Q_k - Q_k P_i = -\frac{h}{2\pi i} \delta_{ik}; \quad P_i P_k - P_k P_i = Q_i Q_k - Q_k Q_i = 0$$

avec $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ et 0 si $i \neq k$.

Ayant ainsi précisé les propriétés des matrices qui doivent servir à représenter les grandeurs atomiques, M. Heisenberg, toujours guidé par la méthode de correspondance, a achevé de constituer sa nouvelle Mécanique quantique en imposant aux matrices de satisfaire à des équations aux dérivées partielles de forme

tout à fait semblable à celle des » équations canoniques » de Hamilton dans la Mécanique classique. Toutefois les équations canoniques de la Mécanique quantique sont en réalité bien différentes des équations classiques de Hamilton car ce sont des équations entre matrices et, pour leur donner un sens précis, il est nécessaire de définir la dérivation d'une matrice par rapport à une autre matrice. Nous n'entrerons pas dans l'exposé de cette question et nous dirons seulement que, dans un problème de Mécanique quantique, la matrice correspondant à l'énergie se présente comme une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les énergies des états stationnaires de l'atome considéré. Dans la théorie d'Heisenberg, la détermination des états stationnaires d'un atome se ramène donc au calcul de la matrice « énergie ».

Nous n'insisterons pas davantage ici sur le développement de la Mécanique nouvelle sous la forme matricielle d'Heisenberg ⁽¹⁾, car nous pourrions retrouver tous les résultats essentiels par la Mécanique ondulatoire dont nous allons maintenant nous occuper.

2. La Mécanique ondulatoire. — Le principe de la Mécanique ondulatoire consiste à prendre comme base de l'étude du mouvement des corpuscules matériels une certaine équation d'ondes. La forme générale de cette équation d'ondes pour un corpuscule, quand on néglige les corrections de relativité, s'obtient de la manière suivante. Soit $H(q_k, p_k, t)$ la fonction Hamiltonienne qui, en Mécanique classique, exprimerait dans le problème considéré l'énergie en fonction des coordonnées q_k , des moments conjugués p_k et du temps t . Dans cette fonction, remplaçons chaque p_k par le symbole d'opération $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$, h étant la constante de Planck.

Nous obtenons ainsi un opérateur Hamiltonien $H(q_k, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, t)$ et l'équation d'ondes s'écrit :

$$(18) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(q_k, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, t) \Psi.$$

Dans certains cas, il pourrait y avoir ambiguïté dans la formation de l'opération H car, si l'on avait par exemple dans la fonction Hamiltonienne classique un terme en $q_k p_k$, il ne reviendrait

⁽¹⁾ On en trouvera un exposé très complet dans le livre de MM. BORN et JORDAN, *Elementare Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1930.

pas au même d'écrire $q_k \times -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}$ ou $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k} \times q_k$ ou encore $\alpha q_k \times \left(-\frac{h}{2\pi i}\right) \frac{\partial}{\partial q_k} + \beta \left(-\frac{h}{2\pi i}\right) \frac{\partial}{\partial q_k}$ avec $\alpha + \beta = 1$, bien que ces diverses formes d'opérateurs puissent aussi légitimement les uns que les autres correspondre d'après la règle de formation de H au terme $q_k p_k$. Mais, quand on emploie toujours des coordonnées cartésiennes, de semblables difficultés ne se présentent pas et nous n'aurons pas dans la suite à nous en préoccuper.

Pour un seul corpuscule de masse m se déplaçant dans un champ qui dérive d'une fonction potentielle $U(x, y, z, t)$, la fonction Hamiltonienne est

$$(19) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z, t)$$

et l'équation d'ondes est alors :

$$(20) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z, t) \right] \Psi$$

ou

$$(21) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} U \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Dans le cas des systèmes quantifiables comme l'atome d'hydrogène, le potentiel U est indépendant du temps et on peut chercher des solutions strictement périodiques dans le temps, contenant par conséquent en facteur une exponentielle de la forme $e^{\frac{2\pi i}{h} Et}$. En posant alors :

$$(22) \quad \Psi(x, y, z, t) = a(x, y, z) e^{2\pi i \nu t}; \quad \nu = \frac{E}{h}$$

on trouve en substituant dans (21) :

$$(23) \quad \Delta a + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U)a = 0.$$

La fonction $a(x, y, z)$, qu'on peut appeler l'amplitude de l'onde stationnaire (22) doit satisfaire à l'équation (23). De plus, il est naturel de supposer que la fonction Ψ doit être finie, continue, uniforme et nulle à l'infini comme le sont les fonctions d'onde de l'optique classique. Nous verrons d'ailleurs plus loin que cette exigence est justifiée par le rôle que jouent les fonctions Ψ en Mécanique ondulatoire. Mais l'équation (23) n'admet en général une solution possédant les propriétés qui viennent d'être énon-

cées (on les appelle fonctions propres de l'équation) que pour certaines valeurs de la constante E (dites valeurs propres de l'équation). Il existe donc une série de valeurs $E_1, E_2 \dots E_n \dots$ de E pour lesquelles on a une solution monochromatique, finie, uniforme et continue. Conformément au postulat fondamental de la théorie des quanta, la fréquence ν de l'onde Ψ doit être reliée à l'énergie E par la relation $E = h\nu$. Le système est donc susceptible de prendre seulement un certain nombre d'états énergétiques, les états stationnaires de Bohr, et les énergies de ces états sont les valeurs propres E_n de l'équation (23). M. Schrödinger a calculé les E_n pour le cas de l'atome d'hydrogène (potentiel de Coulomb en $\frac{1}{r}$) et retrouvé les niveaux d'énergie de la théorie de Bohr et, par suite, l'interprétation de la formule de Balmer, etc.

Plus généralement, si un système mécanique a pour fonction Hamiltonienne classique la fonction $H(q_k, p_k)$ indépendante du temps, q_k représentant les coordonnées cartésiennes des corpuscules qui constituent le système, les états stationnaires du système ont pour énergies les valeurs propres E_n de l'équation :

$$(24) \quad H\left(q_k, -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right) a = E a$$

Les fonctions propres $a_n(q_k)$, ou si l'on veut les ondes stationnaires $\Psi_n(q_k) = a_n(q_k)e^{\frac{2\pi i}{h} E_n t}$, forment un système complet de fonctions orthogonales.

D'abord ce sont bien des fonctions orthogonales, c'est-à-dire telles que

$$(25) \quad \int \Psi_i^* \Psi_j dq_1 \dots dq_n \dots = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

Ceci résulte du fait que l'opérateur Hamiltonien H est un opérateur « hermitique » ou « self adjoint », c'est-à-dire tel que si $f(q_k)$ et $g(q_k)$ sont deux fonctions des q_k finies, uniformes, continues et nulles à l'infini, on a :

$$(26) \quad \int f^* H(g) dq_1 \dots = \int g H^*(f^*) dq_1 \dots$$

On le vérifie aisément et de plus, H étant réel, on a $H^* = H$. Les équations

$$(27) \quad H(\Psi_j) = E_j \Psi_j \quad H(\Psi_i^*) = E_i^* \Psi_i^*$$

donnent aisément :

$$(28) \quad (E_j - E_i^*) \int \Psi_i^* \Psi_j dq_1 \dots = \int [\Psi_i^* H(\Psi_j) - \Psi_j H(\Psi_i^*)] dq_1 \dots = 0$$

en vertu de (26). Dans cette équation exacte pour toutes les valeurs de i et de j , faisons d'abord $i = j$. Nous trouvons $E_i^* = E_i$ et nous voyons alors que les valeurs propres E_i sont toutes réelles comme l'exige leur signification physique. Si nous faisons maintenant dans (28) $i \neq j$, on aura

$$(29) \quad \int \Psi_i^* \Psi_j dq_1 \dots = 0$$

si toutefois $E_i \neq E_j$. Donc les fonctions propres correspondant à deux valeurs propres différentes sont orthogonales. Néanmoins, il peut arriver qu'à une même valeur propre E_i (valeur propre dégénérée) correspondent plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes $\Psi_{i,1} \dots \Psi_{i,p}$ telles que :

$$(30) \quad H(\Psi_{i,j}) = E_i \Psi_{i,j} \quad (j = 1, \dots, p)$$

Mais on voit alors immédiatement que toute combinaison linéaire des $\Psi_{i,j}$ est encore une fonction propre correspondant à la valeur E_i en raison du caractère linéaire de l'opérateur Hamiltonien. Le système des fonctions propres linéairement indépendantes est donc alors déterminé seulement à une substitution linéaire près. Mais il est aisé de se rendre compte que l'on peut profiter de cette indétermination pour choisir les fonctions linéairement indépendantes correspondant à E_i de façon qu'elles soient orthogonales entre elles. Bref, en choisissant convenablement les fonctions propres correspondant aux valeurs propres dégénérées, on peut rendre toujours l'ensemble des fonctions propres orthogonales.

On peut aussi normer à l'unité les fonctions propres car celles-ci, même pour les valeurs propres non dégénérées, ne sont déterminées qu'à une constante multiplicative complexe près, en raison du caractère linéaire de l'équation d'ondes ; autrement dit, on peut toujours choisir le module de cette constante multiplicative arbitraire de façon à avoir :

$$(31) \quad \int |\Psi_i|^2 dq_1 \dots = 1$$

Il reste toujours un facteur indéterminé de la forme $e^{i\alpha}$ (fac-

teur de phase). C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on peut dans les fonctions propres mettre ou omettre le facteur $e^{\frac{2\pi i E}{h} t}$.

Le système orthogonal des fonctions propres normées de l'équation (24) est un système complet, c'est-à-dire que si $f(q_k)$ désigne une fonction des coordonnées q_k , que nous supposons ici finie, uniforme et continue, on peut toujours développer cette fonction suivant le système des a_i (ou des Ψ_i) par les formules :

$$(32) \quad f(q_k) = \sum_i d_i a_i(q_k) \quad \text{ou} \quad f(q_k) = \sum_i c_i(t) \Psi_i(q_k, t)$$

Les coefficients d_i et $c_i(t)$ sont aisés à calculer car leur valeur résulte des propriétés d'ortho-normalité des fonctions propres. On trouve en effet facilement :

$$(33) \quad d_i = \int a_i^*(q_k) f(q_k) dq_1 \dots; \quad c_i(t) = \int \Psi_i^*(q_k, t) f(q_k) dq_1 \dots = d_i e^{-\frac{2\pi i E_i}{h} t}$$

Si la fonction $f(q_k)$ est elle-même normée, on a nécessairement

$$(34) \quad \sum_i |c_i|^2 = \sum_i |d_i|^2 = 1$$

comme on le voit aisément.

3. Opérateurs et matrices en Mécanique ondulatoire. — La Mécanique nouvelle a généralisé le processus qui permet de passer de la fonction Hamiltonienne classique à l'opérateur Hamiltonien. Elle a admis qu'à chaque grandeur mécanique correspond un opérateur A linéaire et hermitique, c'est-à-dire un opérateur tel que l'on ait

$$(35) \quad A(f + \varphi) = A(f) + A(\varphi); \quad \int f^* A(g) dq_1 \dots = \int g A^*(f^*) dq_1 \dots$$

Les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur correspondant à une grandeur mécanique sont alors définies par l'équation :

$$(36) \quad A(\varphi) = \alpha \varphi$$

C'est-à-dire que les valeurs propres sont les valeurs α_i pour lesquelles l'équation (36) possède au moins une solution satisfaisant aux conditions imposées aux fonctions propres. On peut démontrer comme pour l'opérateur H que les valeurs propres α_i sont toutes réelles et que les fonctions φ_i forment un système de

fonctions orthogonales. Ce système est d'ailleurs complet et toute fonction continue, par exemple une fonction d'onde $\Psi(q_k, t)$ est développable suivant les fonctions φ_i .

La nouvelle Mécanique a pris comme base les deux principes suivants : 1° La mesure précise d'une grandeur physique mesurable ne peut fournir comme résultats que l'une des valeurs propres de l'opérateur A correspondant (Principe de quantification) ; 2° Si l'on sait que la fonction d'onde $\Psi(q_k, t)$ du système envisagé est de la forme $\Psi(q_k, t) = \sum_i c_i(t) \varphi_i(q_k)$ où les φ_i sont les

fonctions propres normées de l'opérateur A, la probabilité pour qu'une mesure précise de la grandeur A fournisse à l'instant t la valeur α_i est égale à $c_i(t) c_i^*(t) = |c_i(t)|^2$. (Principe de décomposition spectrale). Notons d'ailleurs que, quand plusieurs fonctions propres correspondent à la même valeur propre α_i , la probabilité de cette valeur α_i est $\sum_l |c_{il}(t)|^2$, c_{il} étant le coefficient de la l^e fonction propre correspondant à α_i dans le développement du Ψ suivant les φ_i .

De ces deux principes généraux, on tire en particulier la conséquence suivante : un système dont l'hamiltonien est H ne peut posséder que des énergies égales aux valeurs propres de l'opérateur H et si à un moment donné le système considéré a pour fonction d'onde $\Psi(q_k, t) = \sum_i c_i(t) \Psi_i(q_k)$, la probabilité pour qu'une mesure précise fournisse pour l'énergie du système la valeur E_i est égale à $|c_i|^2$. (Born).

Une autre conséquence des principes généraux admis par la Mécanique ondulatoire est que la probabilité pour qu'une mesure permette de localiser un corpuscule dans un élément de volume $dx dy dz$ est égale à $|\Psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$. Nous n'insisterons pas ici sur toutes ces questions générales qu'on trouvera traitées dans maints autres ouvrages ⁽¹⁾.

Nous allons maintenant montrer comment la Mécanique ondulatoire peut construire des matrices dont les matrices d'Heisenberg sont un cas particulier. Considérons l'opérateur linéaire et

⁽¹⁾ Voir par exemple le livre de l'auteur : *La quantification en Mécanique ondulatoire*, Hermann, Paris, 1932, où les questions effleurées ici sont traitées plus à fond.

hermitique A correspondant à une certaine grandeur physique et formons $A(\varphi_l)$, φ_l étant la l^e fonction propre d'un système complet quelconque de fonctions normées et orthogonales $\varphi_1 \dots \varphi_l \dots$. La fonction $A(\varphi_l)$ peut se développer suivant le système des φ_k et l'on peut écrire :

$$(37) \quad A(\varphi_l) = \sum_k A_{kl} \varphi_k$$

avec :

$$(38) \quad A_{kl} = \int \varphi_k^* A(\varphi_l) dq_1 \dots$$

Les quantités A_{kl} définissent une matrice, la matrice A , qui est engendrée par l'opérateur A dans le système complet des fonctions de base φ_l .

On peut démontrer que les matrices ainsi définies possèdent les propriétés des matrices algébriques ; en particulier la matrice C somme de la matrice A et de la matrice B et correspondant à l'opérateur $C = A + B$ a pour éléments $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ tandis que pour la matrice C produit de la matrice A par la matrice B et correspondant à l'opérateur $C = AB$, on a :

$$(39) \quad c_{ik} = \sum_l a_{il} b_{lk}$$

De la formule (39) résulte que l'on n'a pas en général pour les matrices la relation de commutativité $BA = AB$. Si d'aventure cela se produit, on dit que les matrices A et B commutent. Si les matrices A et B commutent, il en est de même pour les opérateurs A et B et inversement.

Nous avons supposé implicitement plus haut que l'on savait faire correspondre à toute grandeur physique mesurable un opérateur linéaire et hermitique. En fait, pour les grandeurs mécaniques, la correspondance s'établit comme il suit : à une coordonnée q d'un corpuscule, on fait correspondre l'opération « multiplication par q » ou q . ; à un moment conjugué p , on fait correspondre l'opérateur $-\frac{2\pi i}{h} \frac{\partial}{\partial q}$, q étant la coordonnée conjuguée de p . Toutes les grandeurs mécaniques s'expriment en théorie classique à l'aide des coordonnées et des moments : on obtiendra l'opérateur correspondant à une grandeur mécanique quelconque en formant son expression classique, puis en remplaçant dans cette

expression chaque q par q . et chaque p par $-\frac{2\pi i}{h} \frac{\partial}{\partial q}$. En coordonnées cartésiennes, ce procédé ne conduit à aucune indétermination. En particulier, cette manière de former les opérateurs de la Mécanique ondulatoire est précisément celle que nous avons déjà indiquée pour former l'opérateur Hamiltonien H à partir de la fonction Hamiltonienne classique.

Entre les opérateurs fondamentaux de la Mécanique ondulatoire, existe la relation très importante :

$$(40) \quad pq - qp = \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}\right) q - q \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}\right) = -\frac{h}{2\pi i} \cdot 1$$

car on a $\frac{\partial}{\partial q} q f(q) - q \frac{\partial}{\partial q} f(q) = f(q)$. De (40), on déduit :

$$(41) \quad (pq - qp)_{ik} = \int \varphi_i^* (pq - qp) \varphi_k dq_1 \dots = -\frac{h}{2\pi i} \delta_{ik}$$

car les φ_i sont orthogonales et normées par hypothèse. On peut donc écrire la relation entre matrices :

$$(42) \quad PQ - QP = -\frac{h}{2\pi i} \cdot 1$$

En comparant (39) et (42) avec (13) et (16), on voit alors que les matrices définies par la formule (38) possèdent les propriétés générales des matrices d'Heisenberg. Mais nous avons vu que M. Heisenberg a achevé de définir les matrices de sa Mécanique quantique en leur imposant de satisfaire à certaines équations canoniques ayant la même forme que les équations classiques d'Hamilton. Or M. Schrödinger est parvenu à démontrer que les matrices définies par la formule (38) satisfont les équations canoniques d'Heisenberg si l'on choisit comme système de fonctions de base φ_i précisément le système des fonctions propres Ψ_i de l'opérateur Hamiltonien relatif au problème envisagé ⁽¹⁾. En d'autres termes, on obtient la matrice d'Heisenberg correspondant à la grandeur A en formant par la formule (38) la matrice engendrée par l'opérateur A dans le système des fonctions propres Ψ_i de l'opérateur Hamiltonien. Ce résultat permet évidemment de traiter tous les calculs de la Mécanique quantique dans le langage de la Mécanique ondulatoire. En particulier, on a évidemment :

$$(43) \quad H_{ik} = \int \Psi_i^* H(\Psi_k) d\tau = E_k \int \Psi_i^* \Psi_k d\tau = E_k \delta_{ik}$$

⁽¹⁾ Voir SCHRÖDINGER, *Abhandlungen zur Wellenmechanik*, J. A. Barth, Leipzig, 2^e édition, 1928, p. 734 et ss.

puisque les fonctions Ψ_i sont orthogonales et normées. La formule (43) montre que la matrice d'Heisenberg correspondant à l'énergie est une matrice diagonale dont les termes diagonaux, valeurs propres de l'opérateur H , sont les énergies des divers états quantifiés possibles du système envisagé, résultat qui est bien en accord avec la façon dont la Mécanique quantique calcule ces énergies.

Dans un système quantifié, la fonction d'onde d'un état stationnaire (fonction propre de l'Hamiltonien) est de la forme

$$\Psi_i(q_k, t) = a_i(q_k) e^{\frac{2\pi i}{h} E_i t}.$$

Nous avons donc :

$$(44) \quad A_{ik} = \int a_i^* A(a_k) dq_1 \dots e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i) t}$$

comme expression de l'élément ik de la matrice d'Heisenberg correspondant à la grandeur physique A . Les éléments de matrice sont donc affectés d'un facteur périodique par rapport au temps. On peut, si l'on veut, faire abstraction de ces facteurs périodiques et définir les éléments de la matrice A par la formule :

$$(45) \quad A_{ik} = \int a_i^* A(a_k) dq_1 \dots$$

Les deux définitions (44) et (45) sont d'ailleurs équivalentes quand on a seulement à considérer le carré des modules des A_{ik} , cas fréquent.

Pour terminer ces considérations sur les matrices, nous allons indiquer des formules relatives à la dérivation d'une matrice par rapport au temps en nous bornant d'ailleurs au cas où l'opérateur A ne dépend pas explicitement du temps. Dérivons par rapport au temps l'expression

$$(46) \quad A_{ik} = \int \Psi_i^* A(\Psi_k) dq_1 \dots$$

en nous souvenant que les Ψ sont solutions de l'équation (18) et que l'opérateur H est réel et hermitique. Il vient :

$$\begin{aligned} (47) \quad \frac{dA_{ik}}{dt} &= \int \left[\frac{\partial \Psi_i^*}{\partial t} A(\Psi_k) + \Psi_i^* A \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial t} \right) \right] dq_1 \dots \\ &= \frac{2\pi i}{h} \int [\Psi_i^* (AH - HA) \Psi_k] dq_1 \dots \\ &= \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)_{ik} \end{aligned}$$

D'où la relation entre matrices :

$$(48) \quad \dot{A} = \frac{2\pi i}{h} (AH - HA)$$

En particulier, prenons pour A l'opérateur q correspondant à une coordonnées q d'un des corpuscules du système. On a

$$(49) \quad \frac{dq_{ik}}{dt} = \frac{2\pi i}{h} (qH - Hq)_{ik}$$

En coordonnée cartésiennes, H contient le terme $-\frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial q^2}$ et c'est son seul terme qui ne commute pas avec q . D'où :

$$(50) \quad qH - Hq = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \left(q \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q^2} q \right) = \frac{h^2}{8\pi^2 m} \cdot 2 \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{m} \left(-\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \frac{\partial}{\partial q}$$

et par suite d'après (49) puisque q_{ik} ne dépend du temps que par le facteur $e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i)t}$:

$$(51) \quad \dot{q}_{ik} = -2\pi i \nu_{ik} q_{ik} = \frac{1}{m} \left[\left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \frac{\partial}{\partial q} \right]_{ik} = \frac{1}{m} p_{ik}$$

avec comme toujours $\nu_{ik} = \frac{E_i - E_k}{h}$.

4. Le principe de correspondance en Mécanique ondulatoire. —

Maintenant il nous faut voir comment le principe de correspondance est venu se loger dans le cadre de la nouvelle Mécanique.

Rappelons d'abord que, d'après Heisenberg, si l'on a un très grand nombre N d'atomes dans l'état quantique défini par le nombre n , l'énergie rayonnée en moyenne par unité de temps et par atome sous la forme d'une radiation de fréquence $\nu_{nn'}$ avec champ électrique vibrant parallèlement à l'axe des q est donnée par l'expression $\frac{64\pi^4 \nu_{nn'}^4}{3c^3} \left| \sum_k q^{(k)}_{nn'} \right|^2$ la sommation portant sur toutes les charges électriques formant le système. La grandeur $q^{(k)}_{nn'}$, est l'élément de matrice correspondant à la coordonnée q du k^e corpuscule électrisé de l'atome. Si le système ne comprend qu'un seul électron de charge e , l'expression précédente se réduit à $\frac{64\pi^4 \nu_{nn'}^4}{3c^3} e^2 |q_{nn'}|^2$.

Pour calculer les $q^{(k)}_{nn'}$, à l'aide des fonctions Ψ de la Mécanique ondulatoire, on peut partir du théorème suivant : « Si A est l'opérateur linéaire et hermitique correspondant à une grandeur phy-

sique observable, la valeur moyenne de cette grandeur pour un système dont l'état est représenté par la fonction d'onde Ψ est donnée par la formule :

$$(52) \quad \bar{A} = \int \Psi^* A(\Psi) dq_1 \dots$$

en entendant par « valeur moyenne de la grandeur A » la moyenne de toutes les valeurs qu'une mesure précise de A peut fournir, compte tenu de leurs probabilités relatives, autrement dit l'espérance mathématique pour la grandeur A . » Ce théorème est une conséquence immédiate des principes généraux de la nouvelle Mécanique. En effet, si φ_i et α_i désignent les fonctions propres et les valeurs propres de l'opérateur A et si la fonction d'onde Ψ a un développement de la forme $\sum_i c_i \varphi_i$ suivant ces fonctions propres, la nouvelle Mécanique nous dit que la probabilité de la valeur α_i est $|c_i|^2$. L'espérance mathématique pour A est donc $\sum_i \alpha_i |c_i|^2$. Or on montre facilement que cette expression est égale à l'expression (52) : il suffit pour cela de remplacer dans (52) la fonction Ψ par son développement suivant les φ_i et de tenir compte du caractère ortho-normal de ces fonctions φ_i .

Cela étant, soit un système quantifié, par exemple un atome, formé de f particules électrisées de charges e_1, \dots, e_f et soit x_k la coordonnée x de la k^e particule. On a

$$(53) \quad \bar{x}_k = \int \Psi^* x_k \Psi dq_1 \dots = \int x_k dx_k dy_k dz_k \int \Psi^* \Psi dx_1 \dots dz_{k-1} dx_{k+1} \dots dz_f$$

Le coefficient de x_k est la probabilité pour que la k^e particule se trouve dans l'élément de volume $dx_k dy_k dz_k$, ce qui rend la formule intuitive.

La valeur moyenne de la composante x du moment électrique $\vec{\mathcal{P}}$ de l'atome est donc

$$(54) \quad \bar{\mathcal{P}}_x = \overline{\sum_k e_k x_k} = \sum_k e_k \int x_k \Psi^* \Psi dq_1 \dots$$

S'il n'y a qu'une seule particule, on a :

$$(55) \quad \bar{\mathcal{P}}_x = e \int x \Psi^* \Psi dx dy dz.$$

$\Psi\Psi^* dx dy dz$ étant la probabilité de présence de la particule dans l'élément de volume $dx dy dz$, le produit $e\Psi\Psi^*$ peut être regardé comme la densité moyenne de l'électricité dans cet élément de volume et la formule (55) est toute naturelle.

On voit donc que l'opérateur correspondant à \mathcal{P}_x est $\sum_k e_k x_k$.

L'élément d'indices ij de la matrice correspondante est donc :

$$(56) \quad (\mathcal{P}_x)_{ij} = \int \Psi_i^* \left(\sum_k e_k x_k \right) \Psi_j dq_1 \dots = \sum_k e_k (x_k)_{ij}$$

Dans le cas d'une seule particule $(\mathcal{P}_x)_{ij}$ se réduit à $e x_{ij}$. La connaissance des fonctions Ψ nous permet donc en principe de calculer les $(\mathcal{P}_x)_{ij}$ et par suite les intensités d'émission par la règle d'Heisenberg rappelée au début du paragraphe.

On peut d'ailleurs chercher à justifier la règle d'Heisenberg à l'aide d'une image pseudo-classique développée par M. Schrödinger. Supposons l'atome dans l'état défini par la fonction $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$.

Alors la valeur moyenne de la composante x du moment électrique de l'atome dans l'état considéré, est :

$$(57) \quad \overline{\mathcal{P}_x} = \int \Psi^* \left(\sum_k e_k x_k \right) \Psi d\tau = \sum_{ij} c_i^* c_j \int \Psi_i^* \left(\sum_k e_k x_k \right) \Psi_j dq_1 \dots \\ = \sum_{ij} c_i^* c_j (\mathcal{P}_x)_{ij}$$

avec :

$$(58) \quad (\mathcal{P}_x)_{ij} = \int a_i^* \left(\sum_k e_k x_k \right) a_j dq_1 \dots \times e^{\frac{2\pi i}{h}(E_j - E_i)t}$$

Le moment électrique moyen de l'atome contient donc dans son expression des termes qui présentent toutes les fréquences $\frac{E_i - E_j}{h}$ prévues par la loi de Bohr. On peut donc être tenté de dire que l'atome dans l'état défini par la fonction d'onde Ψ rayonne comme le ferait d'après la théorie classique un atome possédant un moment électrique égal au moment électrique moyen défini par la Mécanique ondulatoire. La loi des fréquences de Bohr se trouverait alors pour ainsi dire démontrée. Malheureusement cette interprétation séduisante ne peut être adoptée à la lettre car elle est trop voisine des conceptions classiques et néglige les discon-

tinuités quantiques. Si, en effet, on prenait cette image à la lettre, on serait amené à regarder l'atome dans l'état Ψ comme émettant simultanément et continûment toutes les fréquences de Bohr alors qu'il est certain que l'émission de ces fréquences est due à des processus discontinus et distincts de transitions quantiques.

Finalement la seule manière correcte d'énoncer la règle pour la prévision des intensités rayonnées est celle due à M. Heisenberg : si l'on a N atomes dans l'état quantique E_i , l'intensité de la radiation de fréquence $\nu_{ij} = \frac{E_i - E_j}{h}$ émise en moyenne par seconde par les N atomes avec un champ électrique vibrant parallèlement à l'axe des q est :

$$N \cdot \frac{64\pi^4 \nu_{ij}^4}{3c^3} |(\mathcal{P}_q)_{ij}|^2$$

On peut d'ailleurs vérifier que cette règle d'émission appliquée au domaine des grands nombres quantiques donne les mêmes résultats que la théorie classique, ce qui est bien en accord avec l'esprit de la méthode de correspondance.

Le calcul des éléments de matrice correspondant aux différentes transitions conduit souvent à trouver des valeurs nulles pour ces éléments. Si certaines composantes de $\vec{\mathcal{P}}_{ij}$ sont nulles, on en conclut par la règle d'Heisenberg que la radiation est polarisée de telle ou telle façon. Si toutes les composantes de $\vec{\mathcal{P}}_{ij}$ sont nulles, l'intensité émise est nulle : la raie correspondante, bien que prévue par la loi de Bohr, ne figure pas en fait dans le spectre de l'atome. On peut ainsi retrouver des « règles de sélection » qui sont tout à fait identiques à celles qu'on obtenait dans l'ancienne théorie des quanta par le principe de correspondance comme nous l'avons montré au dernier chapitre. Nous n'insisterons pas sur la démonstration de ces règles par la Mécanique ondulatoire.

CHAPITRE IV

TRADUCTION MATHÉMATIQUE DES INTERACTIONS ENTRE MATIÈRE ET RADIATION

1. Termes d'interaction dans l'équation des ondes. — D'une façon générale, pour faire une théorie des interactions entre matière et rayonnement, il faut introduire dans les équations du mouvement des particules matérielles, des électrons par exemple, des termes qui traduisent cette interaction. Voyons d'abord comment procédait, pour ce faire, la théorie classique.

Envisageons donc d'abord en théorie classique le cas d'une charge ponctuelle ϵ de masse m se déplaçant dans un champ électrostatique défini par le potentiel scalaire $V(xyz)$. La fonction Hamiltonienne du problème sera :

$$(1) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \epsilon V(x, y, z)$$

et les équations canoniques seront :

$$(2) \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \epsilon \frac{\partial U}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} \quad (i = 1, 2, 3; \\ q_1 = x \dots)$$

Les deuxièmes équations expriment la relation bien connue entre l'énergie et la quantité de mouvement dans la Mécanique classique. Les premières sont les équations classiques du mouvement puisque le champ électrostatique est par définition égal à $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Passons maintenant au cas général d'une particule électrisée se déplaçant dans un champ électromagnétique quelconque défini par le potentiel scalaire $V(x, y, z, t)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(x, y, z, t)$. Dans ce cas, on doit considérer chaque moment p_i de la particule comme étant la somme d'une partie cinétique π_i (qu'on

retrouve égale à $m\dot{q}_i$) et d'une partie électromagnétique $\frac{\varepsilon}{c} A_i$. Autrement dit, on a :

$$(3) \quad p_i = \pi_i + \frac{\varepsilon}{c} A_i$$

La fonction Hamiltonienne sera :

$$(4) \quad H(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) = \frac{1}{2m} [(p_1 - \frac{\varepsilon}{c} A_1)^2 + (p_2 - \frac{\varepsilon}{c} A_2)^2 + (p_3 - \frac{\varepsilon}{c} A_3)^2] + \varepsilon V$$

et l'on aura d'abord comme nous l'avions annoncé :

$$(5) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} (p_i - \frac{\varepsilon}{c} A_i) = \frac{\pi_i}{m}$$

Puis, on trouvera comme équations du mouvement :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{1}{m} \sum_k (p_k - \frac{\varepsilon}{c} A_k) \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \\ &= - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\varepsilon}{c} \sum_k \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{dq_k}{dt} \end{aligned}$$

Comme l'on a :

$$(7) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{dA_i}{dt} = \frac{d\pi_i}{dt} + \frac{\varepsilon}{c} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right)$$

il vient finalement :

$$(8) \quad \frac{d\pi_i}{dt} = - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c} \left[\sum_k \frac{\partial A_k}{\partial q_i} \frac{dq_k}{dt} - \sum_k \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} \right]$$

En vertu de la liaison entre champs et potentiels (formules (29) et (31) du chapitre I), les deux premiers termes du second membre de (8) donnent εh_i tandis que les termes entre crochets se trouvent égaux à la composante i du produit vectoriel $[\vec{v} \cdot \vec{H}]$. D'où :

$$(9) \quad \frac{d\pi_i}{dt} = \varepsilon h_i + \frac{\varepsilon}{c} [\vec{v} \cdot \vec{H}]_i$$

C'est bien l'équation attendue pour le mouvement de la particule sous l'action de la force de Lorentz.

Ceci rappelé, comment allons-nous procéder en Mécanique ondulatoire ? On y a admis comme une première approximation (certainement trop simpliste d'ailleurs) qu'il suffisait pour représenter le champ électromagnétique de conserver les grandeurs \vec{A}

et V classiques en ne faisant subir la transposition quantique qu'aux grandeurs mécaniques attachées aux corpuscules.

Prenons encore ici en premier lieu le cas du champ électrostatique. La fonction Hamiltonienne classique pour une particule électrisée ayant alors la forme (1), l'Hamiltonien quantique sera

$-\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + \epsilon V$ et l'équation d'ondes s'écrira :

$$(10) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\Psi) = \left(-\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + \epsilon V \right) \Psi$$

ou

$$(10 \text{ bis}) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2m}{h^2} \epsilon V \Psi = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

On retombe sur l'équation connue où l'énergie potentielle U a pour valeur ϵV . Passons au cas général de la particule électrisée dans un champ électromagnétique quelconque. La fonction Hamiltonienne classique ayant alors la forme (4), l'opérateur Hamiltonien quantique doit être :

$$(11) \quad H = \frac{1}{2m} \left[\sum_k \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\epsilon}{c} A_k \right)^2 \right] + \epsilon V \\ = -\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + \sum_k \frac{h\epsilon}{4\pi i m c} \left(A_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_k} A_k \right) + \epsilon V + \text{termes en } A^2$$

Dans la plupart des cas, on peut négliger les termes en A^2 . D'autre part, le terme $\frac{\partial}{\partial q_k} A_k$ est égal à $A_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \frac{\partial A_k}{\partial q_k}$. On voit ainsi apparaître des termes en $\vec{\text{div}} \vec{A}$. Mais ces termes sont habituellement, eux aussi, négligeables et, d'ailleurs, une théorie relativiste plus exacte fait apparaître des termes en $\frac{\partial V}{\partial t}$ qui les compensent exactement en vertu de la relation de Lorentz entre les potentiels. Bref, on peut écrire avec une approximation suffisante dans la plupart des cas :

$$(12) \quad H = -\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta + \frac{\epsilon h}{2\pi i m c} \sum_k A_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \epsilon V$$

On en tire l'équation d'ondes :

$$(13) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\Psi) = -\frac{h^2}{8\pi^2m} \Delta \Psi + \frac{\epsilon h}{2\pi i m c} \sum_k A_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} + \epsilon V \Psi$$

ou encore :

$$(13 \text{ bis}) \quad \Delta \Psi - \frac{8\pi^2 m}{h^2} \epsilon V \Psi + \frac{4\pi i \epsilon}{hc} \sum_k A_k \frac{\partial \Psi}{\partial q_k} = \frac{4\pi i m}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Telle est l'équation qui va nous servir à traduire les interactions entre le rayonnement et une particule électrisée et à en calculer les effets.

Dans l'équation (13) nous avons introduit les potentiels V et \vec{A} qui représentent l'onde lumineuse de la théorie classique. Une telle manière de représenter l'onde lumineuse est sujette à objections. En effet, nous avons aujourd'hui toute raison de croire que la structure de la lumière est tout aussi discontinue et quantique que celle de la matière. La représentation de l'onde lumineuse par les fonctions continues \vec{A} et V est donc sujette à caution. L'interaction entre un photon et un élément matériel ne doit pas être foncièrement différente de l'interaction entre deux éléments matériels. Elle devrait donc se représenter en mécanique ondulatoire par une équation d'ondes valable pour le système photon + particule électrisée et portant sur la fonction d'ondes de ce système. On obtiendrait ainsi, dans cette représentation analytique du « choc » d'un photon et d'un élément matériel, des échanges d'énergie se faisant par quanta parce que les deux parties du système, photon et particule matérielle, seraient l'une et l'autre des particules soumises aux lois des quanta. Au lieu de cela, la théorie que nous exposons n'introduit aucune structure et aucune quantification du côté de la lumière, mais seulement du côté de la matière. Elle parvient néanmoins, nous le verrons, à prévoir des échanges d'énergie par quanta, mais c'est parce qu'elle quantifie la matière. En langage un peu figuré, on peut dire que si, dans cette théorie, les échanges d'énergie entre matière et rayonnement se font par quanta, c'est que l'une des parties contractantes, la matière, ne veut échanger l'énergie que par quanta tandis que l'autre partie contractante, la lumière, n'impose aux échanges aucune condition particulière. Or il paraît aujourd'hui physiquement certain que chacune des deux parties contractantes ne veut échanger de l'énergie que par quanta et c'est là ce que la théorie ne traduit pas assez nettement.

Nous ne développerons ici aucune des théories qui ont été faites pour représenter la structure discontinue des radiations ou pour

quantifier le champ électromagnétique lumineux. Nous nous en tiendrons à la théorie fondée sur l'équation (13) parce que si elle ne traduit pas suffisamment en principe l'existence des photons, elle conduit néanmoins, comme nous le verrons, à un très grand nombre de résultats satisfaisants et constitue par suite une bonne représentation de première approximation pour l'ensemble des phénomènes d'interactions entre la matière et le rayonnement.

2. Représentation d'une onde lumineuse plane et monochromatique. — Etant maintenant admis que nous représentons la lumière à l'aide des potentiels de la théorie classique, comment devons-nous choisir ces potentiels pour représenter une onde plane monochromatique ? La réponse est bien connue en théorie classique. Prenons pour axe des z la direction de propagation de l'onde plane monochromatique. Si ox et oy sont perpendiculaires à oz , on peut considérer toute onde plane comme la superposition d'une onde dont le champ électrique vibre parallèlement à ox et d'une onde dont le champ électrique vibre parallèlement à la direction perpendiculaire oy . Il nous suffit donc de savoir construire les potentiels correspondants à une onde dont la vibration électrique est parallèle à un certain axe normal à oz , par exemple l'axe ox , pour pouvoir obtenir les potentiels dans le cas général.

Or, dans le cas de l'onde plane monochromatique à vibration électrique parallèle à ox , on a :

$$(14) \quad h_z = H_z = 0 \quad h_y = H_x = 0 \quad h_x = H_y = h^0 \sin 2\pi v \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

en choisissant convenablement l'origine des z . Les potentiels seront, eux aussi, fonctions de la seule variable de propagation $t - \frac{z}{c}$ et l'on devra avoir :

$$(15) \quad \begin{cases} (\text{rot } A)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 & -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = 0 \\ (\text{rot } A)_x = \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0 & -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

La première équation (15) est satisfaite d'elle-même puisque \vec{A} ne dépend ni de x , ni de y . La troisième donne $\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$, d'où $A_y = C^e$ et nous pouvons poser $A_y = 0$ puisque cela ne change rien aux champs. Avec ce choix de A_y , la quatrième équation (15) est, elle

aussi, satisfaite puisque V ne dépend pas de y . Il nous reste alors à satisfaire la seconde équation (15) et les deux suivantes :

$$(16) \quad (\text{rot } A)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = h^0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right);$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = h^0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Comme V ne dépend pas de x et A_z non plus, les équations (16) sont toutes deux satisfaites en posant :

$$(17) \quad A_x = \frac{h^0 c}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right),$$

Quant à A_z et à V , ils doivent d'après la seconde équation (15) être égaux à une même fonction $F\left(t - \frac{z}{c}\right)$ de la variable $t - \frac{z}{c}$, mais cette fonction reste indéterminée, car la relation de Lorentz entre les potentiels est alors identique et ne peut servir à lever l'indétermination. Les potentiels

$$(18) \quad V = F\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad A_z = F\left(t - \frac{z}{c}\right),$$

définissent une onde longitudinale de potentiel à laquelle correspond, on le voit aisément, un champ électromagnétique nul. Ils n'interviennent pas dans les problèmes d'interaction que nous aurons à traiter et on peut par suite les prendre nuls en faisant $F = 0$. On obtient donc finalement comme potentiels liés à l'onde plane monochromatique :

$$(19) \quad A_y = A_z = V = 0; \quad A_x = \frac{ch^0}{2\pi\nu} \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Une seule grandeur A_x nous permet ainsi de représenter l'onde plane envisagée dans nos équations.

3. Perturbations subies par un atome plongé dans une onde lumineuse. — Le problème essentiel de la théorie des interactions entre matière et rayonnement est celui de calculer les perturbations créées dans l'état d'un atome ou système quantifié par l'action d'une onde électromagnétique extérieure. Considérons, par exemple, un système quantifié contenant un corpuscule. Nous avons en ce cas trouvé l'équation (13). Le corpuscule est soumis dans un système quantifié à des forces dérivant d'un potentiel qui est généralement un potentiel électro-

statique de la forme εV (ainsi dans l'atome d'hydrogène, l'électron est soumis au potentiel de Coulomb créé par le noyau).

Comme dans l'onde lumineuse $V = 0$, les termes $-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \Delta\Psi + \varepsilon V\Psi$ correspond à l'Hamiltonien du système en l'absence de la perturbation causée par l'onde lumineuse ; cet Hamiltonien, nous le nommerons H^0 . En tenant compte des valeurs (19), nous obtenons pour l'équation des ondes Ψ en présence de l'onde lumineuse :

$$(20) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{\varepsilon \hbar}{2\pi i m} \cdot \frac{\hbar^0}{2\pi \nu} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Si le corpuscule est un électron, $\varepsilon = -e$ et en introduisant la notation $p_x = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$, il vient :

$$(21) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{e}{m} \frac{\hbar^0}{2\pi \nu} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) p_x (\Psi).$$

Telle est l'équation qui nous permettra de calculer les perturbations subies par le système quantifié contenant un électron sous l'action d'une onde lumineuse plane et monochromatique de fréquence ν et d'amplitude \hbar_0 .

Si l'on voulait généraliser pour un système contenant plusieurs électrons, on pourrait aisément le faire, mais nous raisonnerons en général sur un système à un corpuscule car l'étude de ce cas simple suffit à dégager les caractéristiques essentielles des phénomènes que nous aurons à étudier.

Faisons encore une remarque. Nous avons défini les champs et les potentiels de l'onde lumineuse à l'aide des fonctions réelles sinus et cosinus. Par analogie avec les ondes Ψ , il pourrait sembler naturel de les définir par les exponentielles complexes correspondantes. Nous verrons plus loin que, si nous procédions ainsi, nous rencontrerions certaines difficultés dans la théorie de la diffusion et de la dispersion tandis que, par compensation, avec les fonctions réelles nous rencontrerons des difficultés dans la théorie de l'effet photoélectrique. Toutes ces difficultés devraient, disparaître dans une théorie plus satisfaisante qui serait sans doute, pensons-nous, amenée à employer systématiquement les expressions complexes pour les potentiels et les champs électromagnétiques comme pour les ondes Ψ .

4. Classification des phénomènes étudiés dans ce livre. — Nous allons maintenant indiquer les principaux phénomènes que nous voulons étudier dans la suite de cet ouvrage.

Le plus simple (du moins en apparence) de ces phénomènes d'action de la matière sur la lumière est le phénomène de diffusion cohérente. Il consiste en ce que, quand une onde lumineuse frappe un morceau de matière, une partie de la radiation incidente est éparpillée dans toutes les directions sans changement de sa fréquence. Ce phénomène est connu dans tout le domaine de radiations qui va de la lumière (longueur d'onde de l'ordre de 10^{-4}) jusqu'aux Rayons X et γ (longueur d'onde de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-11} cm) ; mais, pour des raisons qui nous apparaîtront plus tard, les lois de la diffusion se modifient beaucoup d'un bout à l'autre de ce domaine. En effet, l'intensité de la diffusion cohérente est pour la lumière à peu près en raison inverse de la 4^e puissance de la longueur d'onde (loi de Rayleigh) tandis qu'elle devient indépendante de la longueur d'onde pour les Rayons X durs. La théorie électromagnétique donne une explication, dans l'ensemble très satisfaisante, des phénomènes de diffusion cohérente et de leurs lois. Cependant, certains détails — nombres fractionnaires calculés pour les nombres d'électrons diffuseurs par exemple — montreront que l'explication n'est pas rigoureusement exacte. Les théories quantiques permettent de retrouver les formules classiques en faisant disparaître certaines anomalies gênantes.

La théorie de la dispersion ou variation de l'indice de réfraction avec la fréquence est intimement liée à celle de la diffusion et s'en déduit aisément aussi bien dans le cadre classique que dans le cadre quantique : elle se vérifie expérimentalement dans le domaine lumineux ou dans le domaine X.

Mais l'examen plus approfondi des phénomènes de diffusion a montré qu'à côté de la diffusion cohérente sans changement de longueur d'onde dont les théories classiques peuvent rendre compte, existent des diffusions avec changement de longueur d'onde. Le premier de ces phénomènes qui fut découvert, celui dont la découverte a apporté une nouvelle preuve directe de la structure discontinue de l'énergie radiante, est l'effet Compton qui se manifeste pour les Rayons X et γ . L'effet Compton est un phénomène spécifiquement quantique dont aucune interpré-

tation complète ne paraît pouvoir être donnée dans le cadre des théories classiques. Le second phénomène de diffusion avec changement de longueur d'onde, qui a été découvert postérieurement à l'effet Compton, est l'effet Raman. Cet effet est susceptible d'une sorte d'interprétation classique, mais cette interprétation n'est pas satisfaisante en particulier parce qu'elle ne rend pas compte de la différence d'intensité entre les deux composantes Raman de haute et de basse fréquence. Comme nous le verrons, la véritable théorie de l'effet Raman fait intervenir les conceptions quantiques.

Mais le plus foncièrement quantique des phénomènes dont nous ferons l'étude est l'effet photoélectrique. Dans ce phénomène, l'énergie du quantum de lumière passe entièrement à la matière. Il y a alors projection d'un électron hors de la matière avec une énergie égale au quantum d'énergie radiante qui a disparu, diminué seulement du travail que l'électron a dû dépenser pour sortir de la matière. Nous pourrions développer une théorie quantique assez satisfaisante de l'effet photoélectrique, mais on ne verra pas très nettement comment il est relié aux phénomènes de diffusion. Un examen plus approfondi montre que c'est l'effet photoélectrique, c'est-à-dire *l'annihilation* du photon au contact de la matière, qui est le phénomène primaire essentiel : les effets de diffusion sont des phénomènes secondaires qu'on peut analyser, comme M. Dirac l'a très bien montré, comme la succession de l'annihilation d'un photon incident et de la création d'un photon diffusé. A notre avis, la forme sous laquelle la théorie se présente quand on emploie systématiquement, comme nous le ferons, les procédés de correspondance, n'est pas complètement satisfaisante car elle ignore trop l'existence des photons et n'introduit pas nettement la quantification de l'énergie radiante. Néanmoins son étude est utile et instructive.

CHAPITRE V

DIFFUSION COHÉRENTE ET DISPERSION

1. Théorie classique de la diffusion cohérente. — En théorie classique, le phénomène de la diffusion cohérente s'explique aisément, du moins en principe. Les corps matériels y sont en effet supposés formés d'atomes qui renferment des oscillateurs électroniques, c'est-à-dire des électrons susceptibles d'osciller autour d'une position d'équilibre sous l'action d'une force proportionnelle à l'élongation. Soumis à l'action du champ électrique vibrant d'une onde lumineuse incidente, ces oscillateurs sont mis en état de vibration forcée avec la fréquence de l'onde incidente. Mais comme l'électron oscillant possède alors un moment électrique variable, il rayonne des ondes électromagnétiques dont la fréquence est celle du mouvement forcé, c'est-à-dire de la lumière incidente. D'où le phénomène de la diffusion cohérente.

Pour préciser cette explication classique, envisageons d'abord un seul oscillateur électronique et supposons que la force de rappel vers la position d'équilibre soit la même dans toutes les directions. Lorsque l'électron aura été écarté de sa position d'équilibre dans une direction quelconque, puis abandonné sans vitesse à lui-même, il vibrera autour de la position d'équilibre conformément à l'équation

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

k étant indépendant par hypothèse de la direction de vibration. La solution générale de l'équation (1) étant

$$(2) \quad x = x_0 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right)$$

avec les deux constantes arbitraires x_0 et φ , nous en concluons que l'oscillateur possède la fréquence $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui est indépendante de x_0 : c'est la propriété caractéristique de l'oscillateur linéaire.

Ceci rappelé, étudions le mouvement de l'oscillateur électrique sous l'action d'une onde lumineuse incidente plane et monochromatique. Nous pouvons supposer que l'onde incidente est polarisée rectilignement car, toute onde lumineuse pouvant être décomposée en deux ondes rectilignement polarisées dans des directions rectangulaires, si on a résolu le problème pour une onde incidente rectilignement polarisée, on trouvera la solution générale par simple superposition. Or nous savons qu'en prenant la direction de propagation pour axe des z et celle du champ électrique pour axe des x , nous pouvons exprimer les champs électromagnétiques d'une onde monochromatique rectilignement polarisée sous la forme :

$$(3) \quad \begin{cases} h_x = h^0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right) & h_y = h_z = 0 \\ H_y = h^0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right) & H_x = H_z = 0. \end{cases}$$

Le champ magnétique ne modifie pas sensiblement le mouvement de l'électron le long de l'axe des x et l'on peut considérer celui-ci comme déterminé par l'équation :

$$(4) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - eh^0 \cos 2\pi\nu \left(t - \frac{z_0}{c} \right),$$

(— e étant la charge de l'électron). z_0 est la coordonnée z de l'électron au repos que nous pouvons prendre égale à zéro par un changement d'origine. Cherchons une solution de la forme $x = x_0 \cos 2\pi\nu t$ nous trouvons aisément par substitution dans (4) :

$$(5) \quad x_0 = -\frac{eh^0}{k - 4\pi^2\nu^2 m} = -\frac{eh^0}{4\pi^2 m(\nu_0^2 - \nu^2)},$$

en désignant par ν_0 la fréquence propre $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ de l'oscillateur. Telle est l'amplitude du mouvement forcé pris par la charge oscillante. D'après cette formule (5), l'amplitude du mouvement deviendrait infini pour $\nu = \nu_0$, mais on peut écarter cette conclusion paradoxale en remarquant que nous n'avons introduit dans l'équation (4) aucun terme d'amortissement alors qu'en réalité le mouvement est toujours amorti, ne serait-ce que par l'émission même du rayonnement diffusé dont nous allons calculer l'intensité. La théorie classique a cherché, sans grand succès d'ailleurs, à introduire diverses causes d'amortissement. Nous nous bor-

nerons ici à remarquer que l'introduction d'un amortissement permettrait d'éviter la « catastrophe de résonance » pour $\nu = \nu_0$ et nous garderons la formule (5) en nous souvenant qu'elle n'est plus valable au voisinage immédiat de la fréquence critique ν_0 .

Donc sous l'action d'une onde incidente de fréquence ν rectilignement polarisée, l'électron prend le mouvement défini par :

$$(6) \quad x = -\frac{eh^0}{4\pi^2m(\nu_0^2 - \nu^2)} \cos 2\pi\nu t,$$

sauf pour ν très voisin de ν_0 : le mouvement est proportionnel à l'amplitude h^0 de l'onde électrique incidente et en phase avec elle. A ce mouvement forcé, correspond un moment électrique $\vec{\mathcal{E}}$ de composantes :

$$(7) \quad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = 0 \quad \mathcal{E}_x = -ex = \frac{e^2h^0}{4\pi^2m(\nu_0^2 - \nu^2)} \cos 2\pi\nu t = \frac{e^2}{4\pi^2m(\nu_0^2 - \nu^2)} h_x.$$

Le premier stade est ainsi terminé : il faut maintenant évaluer le rayonnement produit par ce mouvement de l'oscillateur.

Soit O la position d'équilibre de l'électron prise comme origine des coordonnées et soit M un point à une grande distance $R = \overline{OM}$ de l'oscillateur dans une direction faisant l'angle θ avec ox .

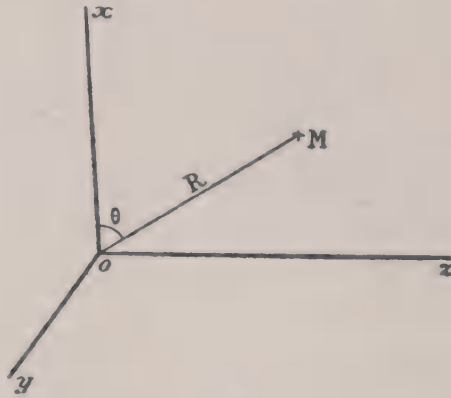


Fig. 4.

D'après les formules classiques rappelées au chapitre Ier, le flux radial de l'énergie rayonnée par unité de temps et unité de surface est égal au point M à :

$$(8) \quad \overline{S}_R = \frac{2\pi^3}{c^3} \frac{\nu^4}{R^2} \sin^2 \theta |\mathcal{E}_x^0|^2,$$

\mathcal{E}_x^0 étant l'amplitude de \mathcal{E}_x . D'où, d'après (7) :

$$(9) \quad \overline{S}_R = \frac{e^4h^0{}^2}{8\pi m^2c^3} \cdot \frac{1}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot \frac{\nu^4}{R^2} \sin^2 \theta.$$

Telle est l'intensité de l'onde diffusée au point M.

Nous pouvons immédiatement généraliser ce résultat en nous affranchissant de la condition que l'onde incidente soit polarisée rectilignement. Si en effet sa polarisation est quelconque, nous aurons deux amplitudes h_x^0 et h_y^0 pour les deux composantes rectangulaires du champ électrique et on voit aisément que nous aurons alors :

$$(10) \quad \mathcal{E}_z^0 = 0 \quad \mathcal{E}_x^0 = \frac{e^2 h_x^0}{4\pi^2 m (\nu_0^2 - \nu^2)} \quad \mathcal{E}_y^0 = \frac{e^2 h_y^0}{4\pi^2 m (\nu_0^2 - \nu^2)}.$$

soit au point M à grande distance R du centre de l'oscillateur, la direction OM faisant des angles θ_x , θ_y et θ_z avec les axes de coordonnées.

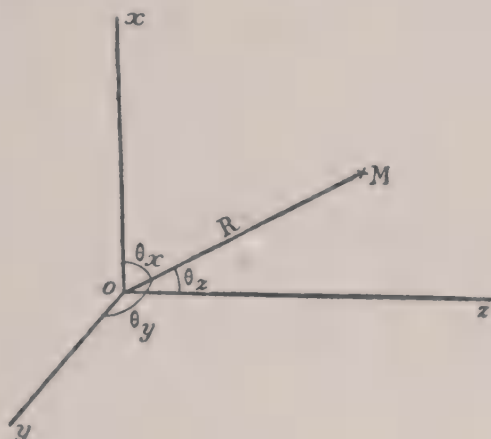


Fig. 5.

Comme les rayonnements dus à deux composantes rectangulaires d'un moment électrique s'ajoutent simplement, on aura ici pour le flux radial de l'énergie au point M par unités de temps et de surface :

$$(11) \quad \begin{aligned} \overline{S_R} &= \frac{2\pi^3}{c^3} \cdot \frac{\nu^4}{R^2} [(\mathcal{E}_x^0)^2 \sin^2 \theta_x + (\mathcal{E}_y^0)^2 \sin^2 \theta_y] \\ &= \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot \frac{1}{R^2} [h_x^{0^2} \sin^2 \theta_x + h_y^{0^2} \sin^2 \theta_y]. \end{aligned}$$

Dans le cas très intéressant où l'onde incidente est de la « lumière naturelle », on peut poser $h_x^0 = h_y^0 = h^0$ et l'on a :

$$(12) \quad \overline{S_R} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot \frac{h^{0^2}}{R^2} (\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y).$$

Comme on a

$$\sin^2 \theta_x + \sin^2 \theta_y = 2 - (\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y) = 2 - (1 - \cos^2 \theta_z) = 1 + \cos^2 \theta_z,$$

nous trouvons finalement la formule fondamentale :

$$(13) \quad \overline{S}_R = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\nu^4}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot \frac{h^0}{R^2} (1 + \cos^2 \theta_z)$$

applicable où la lumière incidente n'est pas polarisée.

Dans tous les cas, à partir des formules donnant \overline{S}_R , on peut calculer le flux diffusé total par intégration du flux local sur toute la surface de la sphère de rayon R et de centre O. Ainsi, pour le cas de la lumière non polarisée, on trouve pour le flux total l'expression

$$(14) \quad \int_0^\pi \overline{S}_R \cdot 2\pi R^2 \sin \theta_z d\theta_z = \frac{e^4 \nu^4 h^0}{4m^2 c^3 (\nu_0^2 - \nu^2)^2} \int_0^\pi (1 + \cos^2 \theta_z) \sin \theta_z d\theta_z \\ = \frac{8\pi e^4 \nu^4}{3m^2 c^4 (\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot \frac{h^0 c}{4\pi}$$

Or le facteur $\frac{h^0 c}{4\pi}$ représente le flux incident d'énergie par unités de temps et de surface, c'est-à-dire l'intensité incidente I_0 : ceci est aisé à vérifier. Donc l'énergie E_d diffusée au total par l'oscillateur pendant l'unité de temps est alors :

$$(15) \quad E_d = \frac{8\pi e^4 \nu^4}{3m^2 c^4 (\nu_0^2 - \nu^2)^2} \cdot I_0.$$

2. Conséquences de la théorie précédente. Coefficient de diffusion. — La formule (15) conduit à des conclusions très simples dans deux cas particuliers importants : 1° celui où la fréquence ν de la lumière incidente est beaucoup plus petite que toutes les fréquences propres des oscillateurs électroniques de la substance traversée ; 2° celui où la fréquence ν au contraire beaucoup plus grande que toutes ces fréquences propres. Comme les fréquences propres qui interviennent dans la diffusion appartiennent en général au domaine ultraviolet, il en résulte que le premier cas est en général réalisé pour la lumière visible et le second pour les Rayons X et γ .

Pour la lumière, on aura donc $\nu_0 \gg \nu$, pour tous les oscillateurs matériels et la formule (15) nous indiquera une diffusion proportionnelle à ν^4 . D'où la loi : « Pour la lumière visible, la diffusion sans changement de fréquence est, toutes choses égales d'ailleurs,

proportionnelle à la 4^e puissance de la fréquence ou, ce qui revient au même, inversement proportionnelle à la 4^e puissance de la longueur d'onde. » C'est la loi fameuse en λ^{-4} prévue par Lord Rayleigh et bien vérifiée en effet pour la lumière visible. Elle explique la couleur bleue du ciel.

Pour les Rayons X et γ , on posera au contraire $\nu_0 \ll \nu$ et, en négligeant ν_0 devant ν , on obtiendra pour la formule (15) une diffusion indépendante de ν . D'où la loi également bien vérifiée : « Pour les rayons X et γ , la diffusion sans changement de longueur d'onde est, toutes choses égales d'ailleurs, indépendante de la longueur d'onde. »

L'intensité de la diffusion est commodément représentée à l'aide d'une grandeur, le coefficient de diffusion, qui exprime l'affaiblissement subi du fait de la diffusion par un faisceau de rayons monochromatiques en traversant un corps donné. Il dépend naturellement à la fois de la radiation incidente et de la nature du corps traversé. Nous ne définissons ici le coefficient de diffusion que pour les Rayons X assez durs et les Rayons γ . La longueur d'onde de ces radiations étant beaucoup plus petite que les dimensions de l'atome, il est permis de considérer les vibrations forcées des divers oscillateurs contenus dans un même atome comme incohérentes et d'obtenir l'effet de diffusion global en ajoutant les énergies diffusées d'après la formule (15) par chaque oscillateur, circonstance qui simplifie notablement l'évaluation du coefficient d'absorption. Considérons donc une substance matérielle homogène contenant N atomes par centimètre cube, chaque atome contenant n_1 oscillateurs de fréquence propre ν_1 , n_2 de fréquence propre ν_2 , etc. Irradiée par des Rayons X assez durs, ou des Rayons γ , de fréquence ν , elle diffusera par unité de volume et unité de temps une quantité d'énergie égale à :

$$(16) \quad E_d = \frac{8\pi e^4 \nu^4}{3m^2 c^4} N \sum_i \frac{n_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2} I_0.$$

Une lame de la substance placée normalement à la radiation incidente ayant une surface de base égale à l'unité de surface et une épaisseur égale à dz diffusera par unité de temps la quantité d'énergie :

$$(17) \quad dE = \frac{8\pi e^4 \nu^4}{3m^2 c^4} \cdot N \sum_i \frac{n_i}{(\nu_i^2 - \nu^2)^2} dz I_0.$$

L'affaiblissement de la vibration incidente sera donc représentée par la formule :

$$(18) \quad dI = - \frac{8\pi e^4 v^4}{3m^2 c^4} N \sum_i \frac{n_i}{(v_i^2 - v^2)^2} Idz$$

et l'on aura pour l'intensité de la radiation incidente quand elle aura traversé une épaisseur z de la substance :

$$(19) \quad I = I_0 e^{-\sigma z}$$

avec :

$$(20) \quad \sigma = \frac{8\pi e^4 v^4}{3m^2 c^4} N \sum_i \frac{n_i}{(v_i^2 - v^2)^2}.$$

Par définition, σ est le coefficient de diffusion de la substance considérée pour la fréquence ν appartenant au domaine des Rayons X assez durs ou des Rayons γ .

Pour une lame de la substance de surface unité et d'épaisseur unité placée normalement au faisceau incident, la quantité σI_0 mesure la diminution de l'intensité après la traversée de la lame. On peut donc dire que σ est le coefficient de diffusion rapportée à l'unité de volume. Comme il y a par hypothèse N atomes semblables dans l'unité de volume, on peut définir un coefficient de diffusion atomique σ_a en posant :

$$(21) \quad \sigma_a = \frac{\sigma}{N}.$$

On peut aussi définir un coefficient de diffusion rapporté à l'unité de masse ou coefficient massique de diffusion en posant :

$$(22) \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\rho}.$$

ρ étant la densité de masse de la substance considérée. Il est d'ailleurs facile de trouver la relation existant entre σ_a et σ_m car si \mathfrak{N} désigne le nombre d'Avogadro, on a pour un corps de poids atomique A dont l'atome a la masse m_A :

$$(23) \quad A = \mathfrak{N} m_A \quad \rho = N m_A$$

d'où l'on tire :

$$(24) \quad \rho = \frac{NA}{\mathfrak{N}}$$

ce qui donne la relation cherchée :

$$(25) \quad \sigma_m = \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\mathfrak{N}}{NA} \sigma = \frac{\mathfrak{N}}{A} \sigma_a.$$

Ces définitions posées, la formule (20) nous montre, puisque tous les ν_i sont usuellement alors très inférieurs à ν , qu'on peut en général écrire l'expression du coefficient d'absorption pour les Rayons X assez durs et les Rayons γ (du moins d'après la théorie classique) sous la forme :

$$(26) \quad \sigma = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4} N \sum_i n_i$$

où $\sum_i n_i$ est égal au nombre atomique Z de la substance considérée puisque Z mesure le nombre d'électrons par atome. Comme le produit NZ donne le nombre total des électrons par unité de volume de la substance, on peut dire que le coefficient d'affaiblissement par diffusion est égal *par électron* à :

$$(27) \quad \sigma_e = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4}$$

et par atome à :

$$(28) \quad \sigma_a = \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4} Z$$

expression remarquable par le fait qu'elle est indépendante de la fréquence et aisément calculable à l'aide des constantes universelles. C'est la loi de J.-J. Thomson qui se vérifie bien pour les Rayons X moyens. Cette loi se met sous une forme plus simple encore si l'on cherche l'expression du coefficient massique de diffusion $\frac{\sigma}{\rho}$. D'après la formule (26), on a en effet en utilisant (28) :

$$(29) \quad \frac{\sigma}{\rho} = \frac{\eta}{A} Z \frac{8\pi e^4}{3m^2c^4}$$

Pour les éléments légers, $\frac{Z}{A}$ est très voisin de 0,5 et en faisant le calcul numérique, on trouve en unités c. g. s. la formule remarquable :

$$(30) \quad \frac{\sigma}{\rho} = 0,2.$$

Cette formule se vérifie bien en effet pour les éléments légers et les Rayons X moyens. Par contre, elle cesse de se vérifier d'une part pour les Rayons X mous et d'autre part pour les Rayons X très durs et les Rayons γ . Pour les Rayons X mous cette divergence s'explique aisément parce qu'alors les longueurs d'onde sont de l'ordre du diamètre de l'atome (ordre de grandeur : 10^{-8} cm)

et les vibrations forcées des divers électrons d'un même atome sous l'influence de la radiation incidente ne peuvent plus être considérées comme indépendantes comme nous l'avons fait dans la démonstration des formules précédentes. La théorie classique permet naturellement de tenir compte de la cohérence des radiations diffusées par les divers électrons et M. Debye a pu développer sur cette base une théorie satisfaisante et bien vérifiée.

Bien plus difficiles à interpréter étaient les écarts constatés à partir de la formule (30) dans le domaine des Rayons X durs et des Rayons γ où elle devrait être rigoureusement valable à cause de la petitesse des longueurs d'onde. Aucune explication fondée sur les théories classiques n'a pu en être donnée. Nous verrons qu'alors l'affaiblissement par diffusion n'est plus dû entièrement à la diffusion cohérente, mais qu'un nouveau phénomène à caractère nettement quantique fait son apparition : la diffusion avec changement de longueur d'onde ou effet Compton. Nous aurons à revenir longuement sur la validité de la formule (30) dans le domaine des très hautes fréquences (voir chapitres VII et VIII).

Avant de clore ce paragraphe, nous remarquerons que le problème réel de la diffusion de la lumière visible est en réalité plus compliqué que ne pourrait le faire croire la théorie schématique du paragraphe 1. Même dans le cadre de la théorie classique, il n'est pas permis de considérer la matière comme formée d'électrons à liaisons quasi-élastiques isotropes dont les mouvements ne s'influencent pas mutuellement. Il faut tenir compte des réactions mutuelles des charges mobiles et, au besoin, de l'anisotropie des liaisons. On peut ainsi interpréter la dépolarisation partielle de la lumière diffusée. Dans la théorie schématique que nous avons développée, si la lumière incidente est polarisée rectilignement, la vibration des électrons oscillants sera parallèle au champ électrique incident et si l'on observe la lumière diffusée dans une direction à angle droit de la direction d'incidence, cette lumière doit être entièrement polarisée. Or, l'expérience ne confirme pas en général cette prévision et indique l'existence dans la radiation diffusée d'une composante vibrant suivant la direction de propagation de l'onde primaire. Si i est l'intensité de cette composante et I l'intensité de la composante normale, le rapport $\rho = \frac{i}{I}$ est appelé le degré de dépolarisation. La théorie classique permet en tenant

compte des interactions entre particules vibrantes et au besoin des liaisons anisotropes de rendre compte de la dépolarisation d'une manière qui est en bon accord avec les faits. Pour l'exposé de ces questions, nous renvoyons au bel ouvrage de M. Cabannes dans la collection des Conférences-rapports ⁽¹⁾.

3. Théorie classique de la dispersion. — La théorie de la dispersion peut se déduire aisément de celle de la diffusion. Pour le voir, il suffit de se reporter à la formule (71) du chapitre 1 que nous récrivons ici :

$$(31) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha'$$

N étant le nombre d'atomes du corps considéré et α' la polarisabilité de ces atomes. Or la formule (7) qui nous donne le moment électrique acquis par un oscillateur électronique sous l'influence d'une onde incidente, nous donne immédiatement comme valeur de la polarisabilité d'un atome contenant n_i électrons de fréquence ν_1 , n_2 de fréquence ν_2 , etc. :

$$(32) \quad \alpha' = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

On en tire :

$$(33) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{e^2 N}{3\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

Quand n est voisin de 1, on peut remplacer $n^2 + 2$ par 3 et écrire :

$$(34) \quad n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

Telle est la formule bien connue de la dispersion valable quand n est assez voisin de 1 et quand ν n'est voisin d'aucuns des ν_i . Comme en général les ν_i sont des fréquences ultraviolettes, on a approximativement quand ν appartient au spectre visible :

$$(35) \quad \frac{1}{\nu_i^2 - \nu^2} = \frac{1}{\nu_i^2} \left(1 - \frac{\nu^2}{\nu_i^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\nu_i^2} + \frac{\nu^2}{\nu_i^4} + \dots$$

d'où :

$$(36) \quad n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2} + \frac{e^2 N}{\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^4} \cdot \nu^2 + \dots = A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$$

⁽¹⁾ J. CABANNES, *La diffusion moléculaire de la lumière*, Presses universitaires, Paris, 1929.

C'est la formule classique de Cauchy souvent valable dans le spectre visible. Remarquons que pour n voisin de 1, on peut approximativement remplacer $n^2 - 1$ par $2(n - 1)$ et écrire au lieu de (34)

$$(37) \quad n = 1 + \frac{e^2 N}{2\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

L'allure de la courbe de dispersion est bien connue et est représentée ci-dessous.

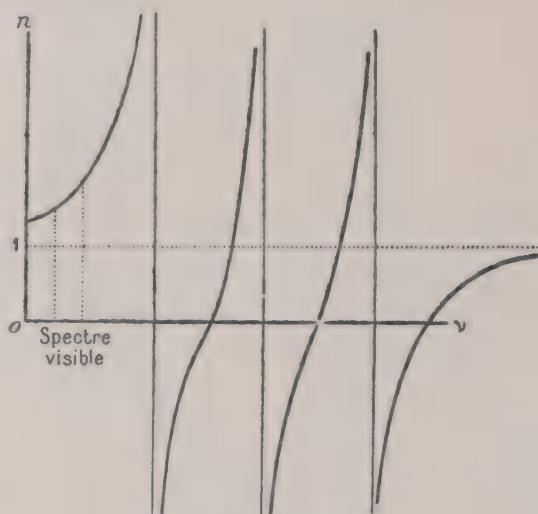


Fig. 6.

Naturellement, n ne devient pas réellement infini pour les fréquences critiques ν_i car, au voisinage de ces fréquences les formules précédentes cessent d'être valables. Pour avoir la forme correcte de la courbe de dispersion, il faut tenir compte de l'amortissement des oscillateurs et de l'absorption : mais ce sont là des questions classiques sur lesquelles nous ne voulons pas nous étendre ici. Notons seulement que les formules données plus haut sont applicables à des ondes de polarisation quelconque, mais supposent isotrope la liaison des oscillateurs.

On peut rattacher d'une manière plus détaillée la théorie de la dispersion à celle de la diffusion. Pour cela considérons une lame mince d'épaisseur ε de la substance réfringente considérée sur laquelle tombe normalement une onde plane monochromatique. Nous supposerons cette onde rectilignement polarisée pour faciliter le raisonnement bien que cette hypothèse ne soit pas indispensable et que la formule finalement obtenue en soit indépendante.

Le champ électrique de l'onde incidente a pour expression avec un choix convenable des axes

$$(38) \quad h_x = h^0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right); \quad h_y = h_z = 0$$

Prenons l'origine des coordonnées sur la lame en 0 et soit M un point de l'axe des z à une distance z de l'origine ⁽¹⁾. Les oscilla-

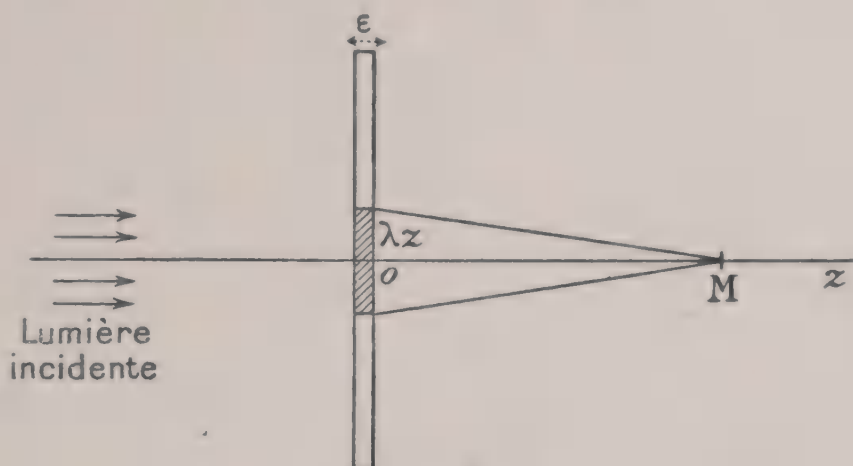


Fig. 7.

teurs électroniques contenus dans la lame vont se mettre à vibrer sous l'action de la lumière incidente et à envoyer de la lumière diffusée en M. On peut calculer l'amplitude de cette lumière diffusée en employant la méthode des zones de Fresnel. D'après cette méthode, on obtiendra la lumière diffusée en M en calculant l'amplitude résultante due à l'action d'une petite surface d'aire λz prise en O sur la lame, c'est-à-dire l'amplitude résultant de la diffusion par le volume hachuré de la figure 7. La phase de la lumière diffusée en M s'obtiendra en ajoutant au trajet z une longueur $\frac{\lambda}{4}$ (c'est-à-dire en introduisant une différence de phase de $\frac{\pi}{2}$). Cela étant, fixons notre attention sur un certain oscillateur situé dans la zone hachurée. Nous avons vu que cet oscillateur prend sous l'influence de la radiation incidente un moment électrique donné par :

$$(39) \quad \mathfrak{E}_x = \frac{e^2}{4\pi^2 m(\nu_0^2 - \nu^2)} h^0 \sin 2\pi\nu t \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = 0$$

⁽¹⁾ Cette distance est supposée grande par rapport à la longueur d'onde λ de l'onde incidente.

D'après la théorie de la radiation, ce moment électrique variable produit au point M le champ électrique :

$$(40) \quad h_x' = \frac{4\pi^2 v^2}{c^2 z} \sin \theta x^0 \sin 2\pi v \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad h_y' = h_z' = 0$$

θ est l'angle avec oz de la droite qui joint l'oscillateur considéré au point M. Cet angle étant très voisin de 0, on peut poser $\sin \theta = 1$. On a donc par (39) et (40) :

$$(41) \quad h_x' = \frac{v^2 e^2}{m(v_0^2 - v^2)} \cdot \frac{1}{c^2 z} h^0 \sin 2\pi v \left(t - \frac{z}{c} \right); \quad h_y' = h_z' = 0$$

Pour appliquer la méthode de Fresnel, nous devons introduire un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire remplacer dans (41) le sinus par le cosinus changé de signe. Comme d'ailleurs la zone hachurée de la figure (7) contient $N\varepsilon\lambda z$ atomes, N ayant la signification habituelle, et que chaque atome contient n_i électrons de fréquence ν_i , le champ électrique total $\Sigma h_x'$ créé au point M par les oscillateurs de la zone de Fresnel se trouve être :

$$(42) \quad \begin{aligned} \Sigma h_x' &= -N\varepsilon\lambda z \frac{v^2 e^2}{m} \frac{1}{c^2 z} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - v^2} h^0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) \\ &= -\frac{N\varepsilon}{\lambda} \cdot \frac{e^2}{m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - v^2} h^0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) \end{aligned}$$

Ce champ se superpose au champ de l'onde lumineuse transmise par la lame qui, en supposant très faible l'affaiblissement par diffusion et absorption dans la lame, peut être considéré comme égal à celui de l'onde incidente. Le champ électrique total en M est donc :

$$(43) \quad h_M = h^0 \left[\sin 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{N\varepsilon e^2}{\lambda m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - v^2} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

Comme ε est très petit, nous pouvons poser par définition :

$$(44) \quad \frac{N\varepsilon e^2}{\lambda m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - v^2} = \sin 2\pi \frac{\nu}{c} \delta \simeq 2\pi \frac{\nu}{c} \delta; \quad \cos 2\pi \frac{\nu}{c} \delta \simeq 1$$

le signe \simeq indiquant une égalité approximative. Le crochet de (43) est alors égal à $\sin 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} - \frac{\delta}{c} \right)$ comme si, en traversant la lame matérielle, l'onde lumineuse avait subi un retard de phase

de $\frac{\delta}{c}$. Si V est la vitesse de phase de la lumière dans la substance considérée, on doit donc avoir :

$$(45) \quad \frac{\delta}{c} = \frac{\varepsilon}{V} - \frac{\varepsilon}{c}$$

ou encore :

$$(46) \quad \delta = \varepsilon(n - 1)$$

n étant l'indice de réfraction de la substance pour la fréquence ν . Puisque l'on a très approximativement d'après (44) :

$$(47) \quad \delta = \varepsilon \frac{Ne^2}{2\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

on trouve finalement :

$$(48) \quad n = 1 + \frac{Ne^2}{2\pi m} \sum_i \frac{n_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

Nous retrouvons la formule (37) ce qui est naturel car nous avons supposé la diffusion faible, donc n voisin de 1. Ce raisonnement nous montre que la propagation de la phase d'une onde lumineuse se fait dans une substance réfringente avec une vitesse différente de c par suite de la superposition à l'onde incidente des ondes diffusées par les particules de la substance.

Avant de quitter la théorie classique de la dispersion, nous devons signaler quelques graves difficultés de cette théorie. Considérons le cas d'un corps homogène à indice voisin de l'unité et envisageons les régions de la courbe de dispersion où l'on peut faire abstraction de l'absorption. Les formules (36) ou (48) seront alors valables. Si l'on admet que les oscillateurs matériels sont formés par des électrons dont on connaît par ailleurs les constantes e et m , comme on connaît aussi N , on peut en principe déduire de la courbe expérimentale de dispersion les valeurs des n_i et l'on doit naturellement s'attendre à trouver des nombres entiers représentant le nombre des électrons des diverses catégories qui participent au phénomène de dispersion. Or le résultat expérimental est que les n_i ne sont pas en général des nombres entiers. La conception classique des oscillateurs électroniques n'est donc pas exacte bien qu'elle donne correctement la forme de la courbe de dispersion.

De plus, il y a aussi une autre difficulté venant de la conception classique de l'émission des raies spectrales. En effet, ces raies

étant sensiblement monochromatiques, la théorie classique a été amenée à les attribuer au rayonnement émis par les oscillateurs électroniques intérieurs à l'atome émetteur. Mais ces oscillateurs, étant capables d'émettre, sont nécessairement aussi capables de vibrer sous l'action d'une onde électromagnétique extérieure et ce sont eux qui doivent intervenir dans la diffusion, la dispersion et l'absorption. Les fréquences critiques ν_i de la formule de dispersion doivent donc coïncider avec les fréquences du spectre d'émission du même atome. Mais alors l'atome devrait contenir autant d'oscillateurs électroniques qu'il peut émettre de raies. Or une telle proposition est inacceptable car le nombre des raies qu'un atome, même simple, peut émettre est toujours grand, parfois même énorme, et l'on ne peut admettre que l'atome contienne un pareil nombre d'électrons.

Si donc on veut conserver l'idée que ce sont les électrons intraatomiques qui servent d'agents de liaison entre l'atome et le rayonnement, on devra, et c'est là le point de vue nouveau de la théorie quantique, admettre que chaque électron « contribue » à un grand nombre d'oscillateurs. On écrira alors à la place de (36) :

$$(49) \quad n^2 = 1 + \sum_i \frac{N f_i e^2}{\pi m (\nu_i^2 - \nu^2)} = 1 + \frac{N e^2}{\pi m} \sum_i \frac{f_i}{\nu_i^2 - \nu^2}$$

où f_i représente la « contribution » des électrons intraatomiques à l'oscillateur de fréquence ν_i . Naturellement ce nouveau point de vue est en opposition avec l'image classique des oscillateurs et montre que les conceptions anciennes sont à réformer. Les f_i sont des nombres fractionnaires : les intensités d'oscillateur (oszillatorenstärke des auteurs allemands). On peut s'attendre à ce que la somme des f_i correspondant à un électron soit égale à un ou plus généralement à ce que la somme des f_i correspondant à z électrons jouant un rôle équivalent soit égale à z . Ce résultat est en effet, nous le verrons plus loin, démontré par la théorie quantique et constitue le théorème de Thomas-Kuhn. Il exprime que chaque électron est en quelque sorte « réparti » entre les divers oscillateurs.

4. Théorie quantique par correspondance de la diffusion. — Pour développer par correspondance une théorie quantique de la diffusion, on part de l'équation :

$$(50) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{e}{m} \frac{\hbar^0}{2\pi \nu} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) p_x(\Psi)$$

qui exprime comment l'onde électrique rectilignement polarisée $h_x = h^0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{c} \right)$ perturbe un système atomique contenant un électron de charge électrique $-e$ et de masse m . Le calcul se développe exactement comme dans la théorie classique en deux stades :

1° Calcul du mouvement dû à l'action de l'onde lumineuse, c'est-à-dire ici calcul de la perturbation apportée à la fonction d'onde Ψ par la présence de l'onde lumineuse.

2° Calcul du rayonnement correspondant au moment électrique variable créé par la perturbation.

Pour effectuer le premier calcul, nous allons introduire ici une hypothèse dont nous aurons ensuite à nous affranchir quand nous voudrons trouver la théorie de l'effet Compton : nous supposons que les dimensions du système atomique envisagé sont très petites par rapport à la longueur d'onde de la lumière incidente de façon que les variations de la phase du cosinus dans la formule (50) soient négligeables à l'intérieur de l'atome. Ceci nous permettra, en choisissant l'origine des z au centre de l'atome, d'écrire le cosinus simplement sous la forme $\cos 2\pi\nu t$. L'hypothèse que nous faisons ainsi est entièrement valable dans le domaine de la lumière, mais elle cesse de l'être pour les Rayons X et γ , ce qui correspond, nous le verrons, au fait que l'effet Compton est inexistant pour la lumière et important pour les Rayons X et γ .

Avec l'hypothèse admise, l'équation (50) peut s'écrire :

$$(51) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{e}{4\pi m\nu} \hbar^0 [e^{2\pi i \nu t} + e^{-2\pi i \nu t}] p_x(\Psi)$$

Nous considérons d'abord un atome dont l'état non perturbé est un certain état stationnaire dont la fonction d'onde Ψ_k^0 soit une fonction propre de l'Hamiltonien non perturbé H^0 . On a naturellement :

$$(52) \quad \Psi_k^0 = a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t}$$

En particulier, si l'on a affaire à un ensemble d'atomes à assez basse température, l'état initial de l'atome sera généralement l'état normal d'énergie minimum et E_k sera cette énergie minimum. Nous reviendrons sur cette question à propos de l'effet Raman.

La présence de l'onde électromagnétique produit dans l'état de l'atome une perturbation qui pratiquement est toujours faible. Nous pouvons donc écrire, comme il est usuel dans la méthode de perturbation, l'onde Ψ existant en présence de la perturbation sous la forme :

$$(53) \quad \Psi_k = \Psi_k^0 + \omega_k$$

ω_k étant de l'ordre du terme perturbateur dans l'équation d'ondes. Comme Ψ_k^0 est une solution de l'équation perturbée, nous obtenons en négligeant les quantités de l'ordre du carré du terme perturbateur :

$$(54) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = H^0(\omega_k) + \frac{eh^0}{4\pi m\nu} (e^{2\pi i\nu t} + e^{-2\pi i\nu t}) p_x(\Psi_k^0)$$

Puisque les fonctions propres Ψ_j^0 de l'équation non perturbée forment un système complet, nous pouvons poser :

$$(55) \quad \omega_k(x, y, z, t) = \sum_j c_j(t) a_j^0(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_j t}$$

les E_j étant les énergies des états stationnaires non perturbés. Substituons (55) dans (54) en nous souvenant toujours que les Ψ_j^0 sont solutions de l'équation non perturbée. Il vient :

$$(56) \quad \frac{h}{2\pi i} \sum_j \frac{\partial c_j}{\partial t} \Psi_j^0 = \frac{eh^0}{4\pi m\nu} (e^{2\pi i\nu t} + e^{-2\pi i\nu t}) p_x(\Psi_k^0)$$

Pour déterminer les $c_i(t)$, nous multiplions les 2 membres par Ψ_i^{0*} et nous intégrons dans tout l'espace (méthode de variation des constantes de Dirac). En raison du caractère ortho-normal des fonctions propres Ψ_j^0 , nous trouvons alors :

$$(57) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{dc_i}{dt} = \frac{eh^0}{4\pi m\nu} (p_x)_{ik} \left[e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k - E_i + h\nu]t} + e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k - E_i - h\nu]t} \right]$$

où :

$$(58) \quad (p_x)_{ik} = \int a_i^{0*} p_x(a_k^0) dx dy dz$$

est l'élément ik de la matrice de Schrödinger engendrée dans le système des Ψ_i^0 par l'opérateur p_x .

Il est maintenant aisé d'obtenir par intégration à partir de (57) les $c_i(t)$ en nous rappelant qu'au début de la perturbation,

instant que nous prenons pour origine des temps, ω_k et par suite tous les c_i sont nuls. On obtient donc :

$$(59) \quad c_i(t) = \frac{e\hbar^0}{4\pi m\nu} \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_k - E_i + h\nu]t} - 1}{E_k - E_i + h\nu} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} [E_k - E_i - h\nu]t} - 1}{E_k - E_i - h\nu} \right]$$

Cette formule donne immédiatement la valeur de ω_k et par suite celle de Ψ_k grâce à (53) et (55)

$$(60) \quad \Psi_k = \Psi_k^0 + \sum_j c_j \Psi_j^0$$

$$= a^0 e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_k t} + \frac{e\hbar^0}{4\pi m\nu} \sum_j (p_x)_{jk} a_j^0 \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k + h\nu)t} - 1}{E_k - E_j + h\nu} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - h\nu)t} - 1}{E_k - E_j - h\nu} - \frac{2(E_k - E_j) e^{\frac{2\pi i}{\hbar} E_j t}}{(E_k - E_j)^2 - h^2 \nu^2} \right]$$

soit maintenant q l'une quelconque des coordonnées x, y, z . Nous admettons en conformité avec la méthode de correspondance que l'énergie émise par l'atome irradié avec une vibration électrique parallèle à l'axe des q est déterminée par la composante q du moment électrique moyen, c'est-à-dire par :

$$(61) \quad (\mathcal{P}_q)_{kk} = (-e) \int \Psi_k^* q \Psi_k dx dy dz$$

quantité qui n'est autre que l'élément diagonal d'indice kk de la matrice correspondant à la composante q du moment électrique dans le système des fonctions perturbées Ψ_k . Nous poserons :

$$(62) \quad q_{kj} = \int a_k^{0*} q a_j dx dy dz.$$

Ces quantités sont les éléments de la matrice correspondant à la coordonnée q dans le système des fonctions propres de l'atome non perturbé.

Si nous formons maintenant explicitement la quantité $(\mathcal{P}_q)_{kk}$ à l'aide de l'expression obtenue plus haut pour les fonctions perturbées Ψ_k , nous trouvons quatre sortes de termes : 1° des termes constants qui ne nous intéressent pas car ils ne correspondent à aucune émission ; 2° des termes en h^{02} que nous considérons comme négligeables à notre degré d'approximation ; 3° des termes contenant des exponentielles indépendantes de ν de la forme $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (E_k - E_j)t}$ qui correspondent à une émission de raies spectrales provoquée par l'irradiation et qui sont étrangères au phénomène de diffu-

sion dont nous faisons ici l'étude ; 4° enfin des termes contenant des exponentielles où ν figure en exposant et qui sont les termes de diffusion. Nous n'avons à nous préoccuper ici que des termes de la 4^e catégorie. En ne gardant que ceux-là, nous obtenons :

$$(63) \quad (\mathcal{P}_q)_{kk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \nu} \sum_j q_{kj}(p_x)_{jk} \left[\frac{e^{2\pi i \nu t}}{E_k - E_j + \hbar \nu} + \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{E_k - E_j - \hbar \nu} \right] + q^{te} \text{ conjuguée}$$

c'est la célèbre formule que MM. Kramers et Heisenberg avaient obtenue par des raisonnements de correspondance avant le développement des nouvelles Mécaniques et qui les avaient conduits à la formule quantique correcte de la dispersion. Si l'on introduit ici, comme nous l'avons fait dans la théorie classique élémentaire, l'hypothèse que l'atome est isotrope, on obtient des simplifications. D'abord, on peut alors démontrer, par exemple en se servant de la théorie des groupes, que les q_{kj} sont réels et, comme $p_{kj} = -2\pi i \nu_{kj} m q_{kj}$ d'après la formule (51) du chapitre III, les p_{kj} sont purement imaginaires. Ensuite on peut aussi montrer que les sommes $\sum_i q_{kj}(p_x)_{jk}$ sont nulles quand q est égal à y ou à z . Les $(\mathcal{P}_y)_{kk}$ et $(\mathcal{P}_z)_{kk}$ sont donc nuls, c'est-à-dire qu'en conséquence de l'isotropie de l'atome, le moment électrique induit est parallèle à la force électrique incidente qu'on suppose vibrer suivant l'axe des x . En tenant compte des caractères de réalité des q_{kj} et p_{kj} , on trouve facilement à partir de (63) :

$$(64) \quad (\mathcal{P}_x)_{kk} = \frac{e^2 i}{\pi m \hbar} \sum_j \frac{x_{kj}(p_x)_{jk}}{\nu_{kj}^2 - \nu^2} \hbar \nu$$

avec $\nu_{kj} = \frac{E_k - E_j}{\hbar}$ comme d'habitude. Comme les matrices x et p_x sont hermitiques et que d'autre part $(\mathcal{P}_x)_{kk}$ est visiblement réel, nous avons aussi :

$$(65) \quad (\mathcal{P}_x)_{kk} = \frac{1}{2} [(\mathcal{P}_x)_{kk} + (\mathcal{P}_x)_{kk}^*] = \frac{e^2 i}{2\pi m \hbar} \left[\sum_j \frac{x_{kj}(p_x)_{jk} - (p_x)_{kj} x_{jk}}{\nu_{kj}^2 - \nu^2} \right] \hbar \nu$$

Si nous posons par définition :

$$(66) \quad f_{kj} = \left(-\frac{2\pi i}{\hbar} \right) [(p_x)_{kj} x_{jk} - x_{kj} (p_x)_{jk}]$$

il vient finalement :

$$(67) \quad (\mathcal{P}_x)_{kk} = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum_j \frac{f_{kj}}{\nu_{kj}^2 - \nu^2} \hbar \nu$$

Nous avons ainsi terminé la première partie du calcul, celle qui consiste à trouver la perturbation causée dans le mouvement de l'électron atomique par l'action de l'onde lumineuse incidente et à évaluer le moment électrique induit qui en résulte.

Il est intéressant de comparer le résultat obtenu avec celui de la théorie classique. Avec celle-ci, nous avons trouvé qu'un oscillateur électronique de fréquence propre ν_0 prenait sous l'influence d'un champ électrique lumineux parallèle à l'axe des x un moment électrique induit égal à :

$$(68) \quad \mathcal{E}_x = \frac{e^2}{4\pi m} \cdot \frac{1}{\nu_0^2 - \nu^2} \cdot h_x$$

La différence entre ce résultat et (67) consiste en ce que : 1° le rôle joué en théorie classique par l'unique fréquence propre ν_0 est joué en théorie quantique par l'ensemble des fréquences ν_{kj} définies par la loi de Bohr ; 2° l'électron atomique, au lieu de constituer un seul oscillateur de fréquence ν_0 est en quelque sorte distribué entre une infinité d'oscillateurs fictifs de fréquences ν_{kj} correspondant aux diverses transitions de l'état initial donné d'énergie E_k aux divers états finaux possibles d'énergies E_j ; les coefficients f_{kj} définis par (66) donnent la manière dont l'électron est « réparti » entre les divers oscillateurs fictifs.

Cela étant, il est naturel de penser que la somme des coefficients f_{kj} , c'est-à-dire $\sum_j f_{kj}$, doit être égale à un. C'est bien là le résultat fourni par la théorie quantique : il est connu sous le nom de théorème de Thomas-Kuhn parce que ces deux savants, s'appuyant sur des raisons de correspondance, l'avaient pressenti avant le développement des nouvelles Mécaniques. Le théorème de Thomas-Kuhn résulte aisément de la formule de non-commutativité des opérateurs x et p_x . On a en effet la formule opératoire :

$$(69) \quad [p_x x - x p_x]_{mn} = \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \delta_{mn}$$

d'où, en prenant $m = n = k$:

$$(70) \quad [p_x x - x p_x]_{kk} = \sum [(p_x)_{kj} x_{jk} - x_{kj} (p_x)_{jk}] = \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \delta_{kk} = -\frac{h}{2\pi i}$$

De (70) résulte immédiatement en vertu de la définition (66) :

$$(71) \quad \sum_j f_{kj} = 1$$

formule qui exprime le théorème de Thomas-Kuhn.

Maintenant que nous connaissons l'expression de $(\mathcal{E}_x)_{kk}$, nous pouvons à l'aide du principe de correspondance quantique former l'expression de l'énergie rayonnée en moyenne par l'atome irradié. Tout d'abord, la radiation diffusée aura son vecteur électrique parallèle à l'axe des x , c'est-à-dire au champ électrique de la vibration incidente : autrement dit, avec notre hypothèse d'isotropie de l'atome, il n'y a pas de dépolarisation. L'énergie diffusée pendant l'unité de temps dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe des x et à une distance R de l'atome est en moyenne :

$$(72) \quad \bar{S}_R = \frac{2\pi^3}{c^3} \frac{v^4}{R^2} \sin^2 \theta |(\mathcal{E}_x^0)_{kk}|^2$$

$(\mathcal{E}_x^0)_{kk}$ étant l'amplitude de $(\mathcal{E}_x)_{kk}$. D'après (67), on a donc :

$$(73) \quad \bar{S}_R = \frac{e^4 h^2}{8\pi m^2 c^3} \left[\sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2} \right]^2 \cdot \frac{v^4}{R^2} \sin^2 \theta$$

Nous avons raisonné sur une onde incidente avec vibration électrique parallèle à ox . Si, au contraire, la lumière incidente comportait un champ électrique dont les composantes suivant ox et suivant oy aient des amplitudes h_x^0 et h_y^0 , on trouverait aisément :

$$(74) \quad \bar{S}_R = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \left[\sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2} \right]^2 \cdot \frac{v^4}{R^2} (h_x^2 \sin^2 \theta_x + h_y^2 \sin^2 \theta_y)$$

Dans le cas où l'onde incidente est formée de lumière naturelle, on peut poser $h_x^0 = h_y^0 = h^0$ et on trouverait comme précédemment (voir formule (13) de ce chapitre) :

$$(75) \quad \bar{S}_R = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \left[\sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2} \right]^2 \cdot \frac{v^4}{R^2} h^2 (1 + \cos^2 \theta_z)$$

θ_z étant l'angle de la direction de diffusion avec oz .

Comme en théorie classique, on obtiendra le flux diffusé au total en moyenne par intégration sur la sphère de rayon R . Dans le cas, par exemple, où la lumière incidente est naturelle, on trouvera :

$$(76) \quad I_d = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} v^4 \cdot \left[\sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2} \right]^2 \cdot \frac{e h_0^2}{4\pi}$$

et comme $\frac{c h_0^2}{4\pi}$ est l'intensité incidente I_0 , on a :

$$(77) \quad I_d = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} v^4 \left[\sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2} \right]^2 I_0$$

formule à comparer avec la formule (15) de la théorie classique.

5. Applications et remarques. — Comme dans la théorie classique deux cas particuliers sont très importants : 1° celui où toutes les fréquences ν_{kj} sont très grandes par rapport à la fréquence ν de l'onde incidente, hypothèse généralement réalisée si la fréquence ν appartient au spectre visible ; 2° celui où la fréquence ν est très supérieure à toutes les fréquences ν_{kj} , hypothèse généralement exacte pour les Rayons X assez durs et les Rayons γ .

Dans le premier de ces deux cas, en négligeant ν^2 devant ν^2_{kj} , on retrouve la proportionnalité de l'intensité diffusée à ν^4 ou λ^{-4} , c'est-à-dire la loi de lord Rayleigh. Dans le second cas, on pourra au contraire négliger les ν_{kj}^2 devant ν^2 et l'on trouvera en tenant compte de la formule (71) de Thomas-Kuhn :

$$(78) \quad I_d = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} \left[\sum_j f_{kj} \right] I_0 = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} I_0$$

c'est-à-dire la formule de J. J. Thomson pour la diffusion par électron et par suite la valeur 0,2 pour le coefficient massique de diffusion $\frac{\sigma}{\rho}$ en admettant que les vibrations diffusées par les divers électrons sont incohérentes.

Les écarts des résultats expérimentaux à partir de la formule $\frac{\sigma}{\rho} = 0,2$ pour les Rayons X mous peuvent encore s'expliquer ici par le procédé de Debye en remarquant que, pour ces radiations, les ondes diffusées par les divers électrons ne sont pas incohérentes. Mais maintenant nous allons aussi pouvoir interpréter les écarts par rapport à la formule de Thomson pour les Rayons X très durs et les Rayons γ . En effet, au début des calculs précédents, nous avons admis que la longueur d'onde de l'onde incidente était beaucoup plus grande que les dimensions de l'atome : or ceci n'est plus vrai pour les Rayons X durs et les Rayons γ dont les longueurs d'onde sont de l'ordre de 10^{-9} ou 10^{-10} cm. alors que le diamètre de l'atome est de l'ordre de 10^{-8} cm. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les formules obtenues à l'aide de cette hypothèse ne soient pas applicables dans le domaine de ces très hautes fréquences. Bien au contraire, ce qui est curieux, c'est que ces formules (en particulier la formule $\frac{\sigma}{\rho} = 0,2$) soient encore très bien vérifiées dans le domaine des Rayons X moyens dont la longueur d'onde (ordre de 10^{-8} cm) est comparable au diamètre de l'atome. Avant la décou-

verte de l'effet Compton, ce fait paraissait tout naturel : on croyait alors que toute la diffusion des Rayons X avait lieu sans changement de longueur d'onde suivant le mécanisme classique et, comme en mesurant le coefficient d'affaiblissement par diffusion des Rayons X moyens on trouvait pour $\frac{\sigma}{\rho}$ la valeur 0,2 prévue par la théorie classique de Thomson, on était très satisfait. Mais ensuite on a découvert l'effet Compton et l'on s'est aperçu qu'il est déjà très important pour les Rayons X moyens. Alors le résultat expérimental obtenu pour le coefficient $\frac{\sigma}{\rho}$ de ces Rayons a paru inexplicable car l'affaiblissement total par diffusion que l'on mesurait expérimentalement devait nécessairement comprendre l'affaiblissement par diffusion sans changement de fréquence correspondant à un $\frac{\sigma}{\rho}$ égal à 0,2 et, en plus, un affaiblissement très notable par diffusion avec changement de longueur d'onde ou effet Compton. Le coefficient total mesuré par les expérimentateurs aurait donc dû être notablement supérieur à 0,2. Cette difficulté est levée par la théorie quantique. Comme nous le verrons en étudiant l'effet Compton au chapitre VII, elle permet de prévoir la coexistence des deux sortes de diffusion avec et sans changement de longueur d'onde (effet Compton et effet Thomson) et elle montre que, pour les longueurs d'onde par trop courtes des Rayons X moyens, le coefficient massique global $\frac{\sigma}{\rho}$ d'affaiblissement par diffusion correspondant à l'ensemble des deux effets doit être égal à 0,2, ce qui est donné à l'effet Compton étant en quelque sorte retiré à l'effet Thomson. Nous remettons donc au chapitre VII l'examen détaillé de cette question.

Avant de passer à la théorie quantique de la dispersion, faisons quelques remarques critiques au sujet de la théorie de la diffusion exposée au précédent paragraphe. Nous y avons calculé le rayonnement diffusé par l'atome en nous servant de la quantité $(\mathcal{E}_x)_{kk}$. Cet élément diagonal de matrice a été évalué à l'aide des fonctions Ψ_k qui décrivent l'état de l'atome sous l'action de la perturbation, mais ne correspondent pas à un état stationnaire. Il ne semble pas que cette manière de procéder soit entièrement satisfaisante : il faudrait bien plutôt considérer le système global atome + rayonnement) et tacher de calculer la probabilité de la transition depuis l'état initial où l'atome est dans l'état stationnaire d'énergie E_k

et où le photon est dans l'état correspondant à l'onde incidente jusqu'à l'état final où l'atome est de nouveau dans l'état stationnaire d'énergie E_k , le photon étant diffusé dans une certaine direction. C'est ainsi que M. Dirac a procédé dans sa théorie des photons et ceci est certainement plus satisfaisant.

Voici une autre remarque. Dans la théorie quantique, le moment électrique E_k correspond à une matrice ayant une infinité d'éléments. Même si nous supposons donné l'état initial d'énergie E_k de l'atome diffuseur, nous n'avons aucune raison de nous borner, comme nous l'avons fait plus haut, à considérer l'élément diagonal d'indices kk : nous devons nous préoccuper de tous les éléments d'indices kl avec l quelconque. Nous verrons au chapitre suivant que la considération de ces éléments conduit à expliquer les diffusions avec changement de fréquence (effet Raman et effet Compton).

6. Théorie quantique par correspondance de la dispersion. —

Dans la théorie quantique, on passe de la diffusion à la dispersion exactement de la même façon qu'en théorie classique. Puisqu'ici c'est la grandeur $(\mathcal{E}_x)_{kk}$ qui joue le rôle de la grandeur \mathcal{E}_x de la théorie classique, la formule (67) nous donne pour la polarisabilité α' :

$$(79) \quad \alpha' = \frac{e^2}{4\pi^2 m} \sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2}$$

d'où l'on tire :

$$(80) \quad n^2 = 1 + 4\pi N \alpha' = 1 + \frac{e^2 N}{\pi m} \sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2}$$

du moins quand n est voisin de l'unité, la formule rigoureuse étant :

$$(81) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{e^2 N}{3\pi m} \sum_j \frac{f_{kj}}{v_{kj}^2 - v^2}$$

Si, au lieu d'avoir affaire à des atomes contenant chacun un seul électron comme nous l'avons supposé plus haut, on considérerait des atomes contenant toute une série d'électrons, on pourrait supposer en première approximation qu'il est permis d'ajouter l'action des divers électrons. Soit alors n_i le nombre des électrons qui dans l'état initial de l'atome possèdent une certaine énergie E_i ; on sera alors amené (si n est voisin de 1) à la formule :

$$(82) \quad n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\pi m} \sum_i n_i \sum_j \frac{f_{ij}}{v_{ij}^2 - v^2} = 1 + \frac{Ne^2}{\pi m} \sum_{ij} \frac{n_i f_{ij}}{v_{ij}^2 - v^2}$$

On peut interpréter cette formule en disant que le produit $n_i f_{ij}$ mesure la « contribution » des n_i électrons de la i^{e} catégorie à l'oscillateur fictif de fréquence ν_{ij} . La somme des contributions des $Z = \sum_i n_i$ électrons de l'atome à tous les oscillateurs fictifs est :

$$(83) \quad \sum_{ij} n_i f_{ij} = \sum_i n_i \sum_j f_{ij} = Z$$

d'après le théorème de Thomas-Kuhn.

En dehors de la remarque essentielle relative à la « distribution » des électrons entre les oscillateurs fictifs, remarque qui lève la difficulté créée par la valeur fractionnaire des nombres d'électrons de dispersion fournis par l'expérience, la formule (82) se prête à d'autres commentaires intéressants.

Un premier commentaire porte sur une caractéristique de la formule quantique de dispersion qui nous paraît aujourd'hui tout à fait naturelle, mais qui a paru constituer un très grand progrès quand MM. Kramers et Heisenberg sont parvenus avant le développement de la nouvelle Mécanique à obtenir cette formule de dispersion par des considérations de correspondance. Cette circonstance c'est l'apparition dans la formule, comme fréquences critiques de dispersion, des fréquences de Bohr de l'atome considéré. Dans la théorie primitive de l'atome de Bohr il y avait en effet une grave difficulté au sujet de la dispersion. Tandis que les fréquences des raies émises ou absorbées étaient dans cette théorie définies par la loi des fréquences de Bohr $\nu_{ij} = \frac{E_i - E_j}{h}$, le mouvement de l'électron sur son orbite permettait toujours de définir une fréquence de révolution qui n'avait aucun rapport simple avec les fréquences de Bohr ; or il semblait qu'une perturbation de l'atome par une onde électromagnétique extérieure aurait dû faire intervenir les fréquences de révolution mécanique et non pas les fréquences de Bohr de telle sorte que, dans la formule de dispersion, les fréquences critiques auraient dû coïncider avec les fréquences mécaniques et par suite être absolument différentes des fréquences d'émission et d'absorption. Mais l'expérience indique au contraire avec certitude que les fréquences critiques de dispersion d'un atome coïncident avec leurs fréquences d'émission et d'absorption. Par leurs considérations de corres-

pondance, MM. Kramers et Heisenberg étaient parvenus avant le développement des Mécaniques nouvelles à trouver la formule de dispersion (82) et à justifier ainsi l'introduction des fréquences d'émission et d'absorption comme fréquences critiques. Ce résultat fut alors considéré à juste titre comme un très beau succès. Aujourd'hui la chose nous paraît beaucoup plus naturelle car la nouvelle Mécanique ne reconnaissant plus l'existence d'une trajectoire de l'électron dans l'atome, ni par suite d'une fréquence de révolution, ne peut plus trouver comme fréquences critiques que les fréquences de Bohr. En fait, nous avons vu comment la théorie quantique retrouve naturellement la formule (82) de Kramers et Heisenberg.

Un second commentaire relatif à la formule de dispersion porte sur les transitions qui y interviennent. Nous y voyons en effet figurer les ν_{kj} définies comme étant les fréquences de transition de Bohr. Si l'état k est un état excité, c'est-à-dire tel qu'il existe des états quantiques d'énergies $E_j < E_k$, il y aura à côté des fréquences critiques d'absorption correspondant aux $E_j > E_k$ des fréquences d'émission pour lesquelles on aura $E_k > E_j$. On peut démontrer que les coefficients de répartition f_{kj} sont positifs dans le premier cas et négatifs dans le second. L'existence des termes correspondant aux fréquences d'émission dans la formule de dispersion ne peut être mise en évidence qu'en employant par exemple un gaz où les atomes excités sont en relativement grand nombre. L'expérience a été faite et a confirmé l'existence réelle de ces termes (Ladenburg).

Voici encore une remarque intéressante sur la formule de dispersion quantique : toutes les fréquences de Bohr de l'atome envisagé n'y figurent pas *effectivement*. En effet, pour qu'une fréquence ν_{kj} figure effectivement dans la formule de dispersion, il faut que le facteur f_{kj} correspondant soit différent de zéro. Pour cela, il faut et suffit que x_{kj} soit différent de zéro car $p_{kj} = -2\pi i m \nu_{kj} x_{kj}$ est nul en même temps que x_{kj} et par suite la condition $x_{kj} \neq 0$ entraîne $f_{kj} \neq 0$ d'après (66) et inversement. Or la condition $x_{kj} \neq 0$ exprime que la transition $k \rightarrow j$ est possible avec émission ou absorption d'une radiation dont le champ électrique vibre parallèlement à ox . Autrement dit, les transitions pour lesquelles $x_{kj} = 0$ sont interdites par les règles de sélection. Ainsi dans la formule quantique de la dispersion ne figurent

effectivement comme fréquences critiques que les fréquences de Bohr figurant effectivement dans les spectres normaux d'émission et d'absorption de l'élément considéré. Les fréquences de Bohr qui n'interviennent pas normalement dans l'émission n'interviennent pas non plus dans la dispersion. Nous rencontrerons des résultats tout à fait différents en étudiant l'effet Raman.

Les formules de dispersion indiquées plus haut ne sont, bien entendu, valables ainsi que les formules de diffusion correspondante que pour les fréquences incidentes assez éloignées des fréquences critiques. Dans les régions de dispersion anormale, il faudrait tenir compte de l'amortissement des oscillateurs fictifs qui se traduit en théorie quantique par une certaine « largeur » des niveaux d'énergie. Nous n'insisterons pas ici sur cette théorie assez délicate.

CHAPITRE VI

APERÇU SUR L'EFFET RAMAN

1. L'effet Raman et son interprétation par la théorie classique. —
Nous allons aborder l'étude de la diffusion avec changement de longueur d'onde et nous commencerons par le phénomène qui se manifeste dans le domaine optique, l'effet Raman, bien que chronologiquement il ait été découvert après l'effet Compton dont nous parlerons seulement au chapitre suivant.

L'effet Raman consiste en ceci que, dans la lumière diffusée par les molécules d'un corps, on observe souvent, à côté de la raie diffusée sans changement de longueur d'onde (diffusion de Rayleigh), d'autres raies de fréquences un peu différentes. On constate que ces raies ont une fréquence qui diffère de la fréquence de l'onde incidente par une quantité caractéristique de la molécule diffusante et indépendante à la fois de la fréquence incidente et de la direction d'observation. Par exemple, en irradiant d'abord une certaine espèce de molécules par une lumière de fréquence ν , on observera dans la lumière diffusée la raie Rayleigh de fréquence ν et d'autres raies de fréquences $\nu - \nu_1, \nu - \nu_2, \dots, \nu - \nu_n$. En irradiant ensuite les mêmes molécules avec une lumière de fréquence ν' , on obtiendra la raie diffusée de fréquence ν' et d'autres raies de fréquences $\nu' - \nu_1, \nu' - \nu_2, \dots, \nu' - \nu_n$ avec les mêmes valeurs de $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ que dans le premier cas. Au contraire, les quantités $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ changeraient de valeurs si l'on faisait l'expérience avec une autre sorte de molécules : elles sont donc bien caractéristiques de la molécule diffusante et indépendantes de la lumière irradiante. Une étude plus approfondie du phénomène montre d'ailleurs qu'en plus de ces raies à fréquences diminuées, on aperçoit parfois d'autres raies diffusées d'intensité faible correspondant aux fréquences $\nu + \nu_1, \nu + \nu_2, \dots, \nu + \nu_n$. Tel est le beau phénomène découvert en 1928 par Sir Venkata Raman et, depuis, très minutieuse-

ment étudié par Raman lui-même et ses élèves et par un très grand nombre de physiciens parmi lesquels on doit citer en France MM. Cabannes, Daure et leurs collaborateurs et en Italie M. Rasetti.

Les fréquences $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ sont des fréquences intervenant dans le spectre de bandes des molécules observées, c'est-à-dire correspondant à des mouvements de rotation ou de vibration interne de ces molécules. Les spectres de bandes étant des spectres compliqués, les résultats obtenus sur l'effet Raman sont dans l'ensemble assez complexes et ne peuvent s'interpréter en détail que si l'on reprend d'abord la théorie des spectres de bandes. Comme ceci nous entraînerait trop loin, nous n'entrerons pas ici dans l'analyse détaillée des résultats expérimentaux et de leur interprétation. Nous nous bornerons à quelques indications générales d'ordre théorique.

Ainsi que l'ont montré MM. Cabannes et Rocard, la théorie classique permet de pressentir l'existence de l'effet Raman. En effet, si la molécule est animée d'un mouvement de rotation, les oscillateurs qu'elle contient vont être entraînés par ce mouvement qui va se superposer au mouvement de vibration provoqué par l'action de l'onde incidente. Les composantes du moment électrique, au lieu d'être, comme dans le cas de non-rotation de la forme :

$$(1) \quad \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x^0 \sin 2\pi\nu t \dots$$

ν étant la fréquence de l'onde incidente et \mathcal{E}_x^0 la constante d'amplitude, seront de la forme :

$$(2) \quad \mathcal{E}_x = A \sin (2\pi\nu_r t + \varphi) \sin 2\pi\nu t \dots$$

ν_r étant la fréquence de rotation de la molécule qui est toujours très inférieure à ν . La formule (2) peut aussi s'écrire :

$$(3) \quad \mathcal{E}_x = \frac{A}{2} [\cos (2\pi(\nu + \nu_r)t + \varphi) - \cos [2\pi(\nu - \nu_r)t - \varphi]]$$

et \mathcal{E}_x a deux composantes harmoniques de même amplitude $\frac{A}{2}$ et de fréquence $\nu - \nu_r$ et $\nu + \nu_r$. En théorie classique ν_r peut prendre n'importe quelle valeur, mais en réalité les fréquences de rotation ν_r de la molécule sont en nombre limité, fait dont l'interprétation exige l'intervention des quanta. Cette théorie classique de l'effet Raman, bien que très intéressante, est donc

forcément incomplète puisqu'elle est obligée d'admettre une limitation des fréquences de rotation ν_r qui est étrangère aux conceptions classiques. Mais il y a plus : les deux composantes harmoniques de \vec{x} ayant même amplitude $\frac{A}{2}$, les intensités des rayonnements correspondants devraient, d'après les formules de la théorie classique du rayonnement, être proportionnelles aux 4^{es} puissances de fréquences $\nu + \nu_r$ et $\nu - \nu_r$. On devrait donc avoir :

$$(4) \quad \frac{I(\nu + \nu_r)}{I(\nu - \nu_r)} = \left(\frac{\nu + \nu_r}{\nu - \nu_r} \right)^4$$

Le rapport au second membre de (4) est voisin de 1 puisque ν_r est toujours beaucoup plus petit que ν , mais il est néanmoins supérieur à 1. La raie Raman déplacée vers les hautes fréquences devrait être un peu plus intense que la raie Raman déplacée vers les faibles fréquences. Or l'expérience indique exactement le contraire : en accord avec l'esprit de la fameuse règle de Stokes, la raie déplacée vers les grandes longueurs d'onde (raie Stokes) est toujours beaucoup plus intense que la raie déplacée vers les courtes longueurs d'onde (raie anti-Stokes). Ceci montre d'une façon péremptoire l'inexactitude de la théorie purement classique de l'effet Raman et oblige ici encore à aller chercher du côté des quanta la véritable interprétation.

2. Théorie purement quantique de l'effet Raman. Sauts de Smekal. — En face de cette tentative d'interprétation de l'effet

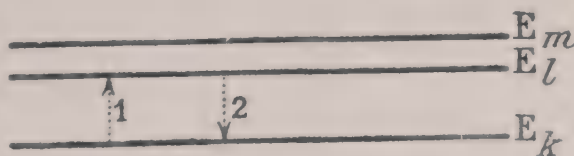


Fig. 8.

Raman par la théorie classique, on peut dresser une tentative d'interprétation purement quantique en partant d'idées exposées d'abord par M. Smekal, plusieurs années avant la découverte du phénomène. Pour cela, on part de la considération du choc d'une particule contre un système quantifié, atome ou molécule. Le système quantifié possède une série de niveaux d'énergie que l'on peut représenter dans un schéma aujourd'hui bien connu,

par une série de traits horizontaux dont la distance verticale est proportionnelle à la différence des énergies des niveaux.

Une transition est représentée par une flèche verticale partant du niveau initial pour arriver au niveau final. Cette flèche est dirigée vers le haut si l'énergie du système quantifié augmente pendant la transition et vers le bas dans le cas contraire. Ce mode de représentation étant adopté, on appelle « choc élastique » d'une particule contre le système quantifié un processus d'interaction entre la particule et le système au cours duquel la particule est déviée de sa direction primitive sans que l'énergie du système ait finalement varié. On appelle par contre « choc inélastique » un processus d'interaction dans lequel il y a échange d'énergie entre la particule et le système quantifié. On a alors à distinguer deux sortes de chocs inélastiques. Il y d'abord les « chocs inélastiques de première espèce » ou « chocs ionisants » dans lesquels la particule cède de l'énergie au système quantifié, celui-ci passant de l'état stationnaire d'énergie E_k à l'état stationnaire d'énergie plus élevée E_l (fig. 8, flèche 1). Il y a ensuite les « chocs de seconde espèce » ou « chocs désionisants » sur lesquels l'attention a été attirée par Klein et Rosseland : dans ces chocs le système quantifié cède de l'énergie à la particule en passant d'un état stationnaire initial d'énergie E_l à un état stationnaire final d'énergie $E_k < E_l$ (flèche 2 de la fig. 8). Il est visible que, dans les conditions usuelles, les chocs de seconde espèce seront beaucoup plus rares que les chocs de première espèce. En effet, dans un ensemble d'atomes ou de molécules en équilibre thermodynamique, aux températures usuelles la très grande majorité de ceux-ci se trouveront dans l'état d'énergie minimum E_k à cause de la loi de répartition de Boltzmann d'après laquelle le nombre des atomes

ou molécules dans l'état E_l est proportionnel à $e^{-\frac{E_l}{kT}}$. Pour ces atomes dans l'état d'énergie minimum, sera seule possible une transition avec élévation d'énergie, c'est-à-dire un choc de première espèce. Seuls les atomes ou molécules déjà partiellement excités par l'effet de l'agitation thermique et se trouvant dans un des états E_l, E_m, \dots pourront être ramenés à l'état normal par un choc de deuxième espèce, mais ces atomes-là sont très peu nombreux. Notons que la situation devient plus favorable aux chocs de seconde espèce quand on considère les chocs subis par une

assemblée d'atomes qui est soumise par ailleurs à une influence ionisante, par exemple qui est irradiée par un rayonnement ionisant.

La théorie de Smekal consiste à appliquer les considérations précédentes au choc entre un photon et un système quantifié, atome ou molécule. Soit ν la fréquence de l'onde incidente, $h\nu$ étant l'énergie du photon incident. Le photon incident pourra subir un choc élastique sans changement de son énergie, ni par suite de sa fréquence, et ce sera le phénomène de diffusion sans changement de longueur d'onde auquel s'appliquent les formules de Rayleigh et de Thomson. Mais il pourra aussi subir un choc inélastique et alors deux hypothèses seront à envisager : 1° le photon cède une partie de son énergie au système quantifié en élevant celui-ci du niveau énergétique E_k au niveau énergétique plus élevé E_l : son quantum est alors diminué de $E_l - E_k$ et il est diffusé avec l'énergie $h\nu - (E_l - E_k)$; d'après la correspondance quantique entre l'énergie du photon et sa fréquence, nous en concluons que le photon diffusé à la fréquence $\nu' = \nu - \frac{E_l - E_k}{h} = \nu - \nu_{lk}$, ν_{lk} étant la fréquence d'émission du système quantifié correspondant à la transition $l \rightarrow k$. Il y a donc ici diminution de la fréquence par diffusion. 2° Le photon peut aussi recevoir dans le choc de l'énergie qui lui est cédée par le système quantifié si celui-ci est dans l'état E_l qui n'est pas l'état d'énergie minimum. Au moment du choc, le système passe alors de l'état d'énergie E_l à l'état d'énergie moindre E_k et le photon est diffusé avec l'énergie $h\nu + E_l - E_k$, c'est-à-dire avec la fréquence $\nu + \frac{E_l - E_k}{h} = \nu + \nu_{lk}$, ν_{lk} étant encore la fréquence d'émission du système quantifié correspondant à la transition $l \rightarrow k$. Il y a donc augmentation de la fréquence par diffusion dans ce processus. Finalement, on voit donc qu'à toute raie de fréquence ν contenue dans la lumière incidente, correspondant dans le spectre diffusé des raies de fréquences $\nu \pm \nu_{lk}$, les ν_{lk} étant caractéristiques du système diffuseur. Ceci correspond bien à l'effet Raman.

La théorie purement quantique de l'effet Raman a sur la théorie électromagnétique de ce phénomène l'avantage de serrer certainement de plus près la nature physique réelle du phénomène, mais elle a aussi un avantage plus évident : elle explique pourquoi les raies anti-Stokes de fréquences $\nu + \nu_{lk}$ sont plus faibles que les

raies Stokes de fréquences $\nu - \nu_k$. Cette explication résulte immédiatement du fait que les raies de fréquences $\nu + \nu_k$ sont dues à des chocs de seconde espèce tandis que les raies de fréquences $\nu - \nu_k$ sont dues à des chocs de première espèce. C'est seulement la présence dans la matière irradiée de quelques atomes partiellement excités qui permet l'émission des raies anti-Stokes et, ces atomes étant peu nombreux, les raies anti-Stokes sont très faibles.

On peut d'ailleurs rattacher la prédominance des raies Stokes à des considérations générales d'ordre thermodynamique. On sait par les lois du rayonnement d'équilibre thermique qu'aux températures usuellement réalisées à la surface de la terre, le maximum de la courbe de répartition spectrale des énergies de ce rayonnement est dans l'infra-rouge, les radiations du spectre visible étant de faible intensité. Il faut arriver à des températures de l'ordre de quelques milliers de degrés pour que le maximum en question soit situé dans le spectre visible. Si donc à la surface de la terre nous produisons un faisceau de rayons lumineux, les photons de ce faisceau ont toujours une énergie moyenne beaucoup plus grande que celle qu'ils devraient normalement posséder, étant données les conditions thermiques ambiantes. Or les échanges d'énergie tendent toujours dans l'ensemble à réaliser l'équilibre thermique. Les interactions entre un faisceau lumineux et la matière dans les conditions usuellement réalisées à la surface de la terre auront donc dans l'ensemble une forte tendance à abaisser l'énergie des photons en les ramenant vers l'infra-rouge. C'est cette tendance qui est exprimée par la règle de Stokes et c'est elle qui se trouve ici également exprimée par la prédominance de la diffusion Raman avec abaissement de fréquence sur la diffusion Raman avec élévation de fréquence.

La théorie purement quantique de l'effet Raman a donc bien sur la théorie électromagnétique du phénomène la grande supériorité d'expliquer la prédominance des raies Stokes et ce fait a une signification profonde. De même que la théorie classique de l'émission considère toutes les raies du spectre d'un atome comme simultanément émises par chaque atome, de même la théorie classique de l'effet Raman considère les raies Stokes et anti-Stokes comme émises simultanément par une même molécule, d'où elle tire la conclusion inexacte que les deux espèces de raies sont émises avec presque la même intensité, les raies anti-Stokes

étant même légèrement avantagées. La théorie quantique au contraire, aussi bien quand il s'agit de l'effet Raman que de l'émission, attribue la production des raies à des transitions de l'atome ou de la molécule d'un état quantique à un autre, chaque raie correspondant ainsi à un processus différent : elle prévoit donc une différence d'intensité entre les raies Stokes et les raies anti-Stokes, l'état initial correspondant aux premières étant dans les conditions usuelles bien plus fréquemment réalisé que les états initiaux correspondant aux secondes. Le fait que l'observation est en accord avec cette prévision de la théorie quantique montre donc bien que la conception classique de l'émission est inexacte.

Néanmoins, la théorie purement quantique de l'effet Raman fondée sur les idées de Smekal n'est pas non plus complète car elle ne fournit aucune indication sur les intensités et la polarisation. Cette lacune se trouve comblée par la théorie quantique par correspondance dont nous allons parler.

3. Théorie quantique par correspondance de l'effet Raman : —

Dans la théorie quantique par correspondance, on rattache l'émission des raies Raman aux éléments non diagonaux $(\mathcal{P}_x)_{kj}$, avec $k \neq j$, du moment électrique de l'atome ou la molécule.

Raisonnons toujours sur un système à un électron soumis à une onde incidente dont le champ électrique est $h_x = h_x^0 \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{z}{\lambda} \right)$; $h_y = h_z = 0$. Nous prendrons l'origine des coordonnées au centre du système quantifié et nous négligerons les variations de phase de l'onde incidente dans l'étendue de ce système, ce qui est permis puisque l'effet Raman est un phénomène relatif à la lumière visible dont les longueurs d'onde sont très supérieures aux dimensions atomiques. Dans ces conditions, nous avons vu (formule (60) du chapitre précédent) que, si le système est, avant la perturbation, dans l'état stationnaire $\Psi_k^0 = a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$, il passe sous l'action de cette perturbation dans l'état représenté par la fonction :

$$(5) \quad \Psi_k = a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t} + \frac{eh^0}{4\pi m\nu} \sum_j (p_x)_{jk} a_j^0 \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k + h\nu)t}}{E_k - E_j + h\nu} + \frac{e^{\frac{2\pi i}{h} [E_k - h\nu]t}}{E_k - E_j - h\nu} - \frac{2(E_k - E_j)e^{\frac{2\pi i}{h} E_j t}}{(E_k - E_j)^2 - h^2\nu^2} \right]$$

les éléments de matrice $(p_x)_{jk}$ étant formés à l'aide des fonctions non perturbées Ψ_j^0 .

Cela étant, pour calculer la diffusion sans changement de fréquence, nous étions partis de l'élément diagonal :

$$(6) \quad (\mathcal{P}_x)_{kk} = -e \int \Psi_k^* x \Psi_k dx dy dz$$

qui correspond à la transition $k \rightarrow k$, c'est-à-dire à l'absence de changement d'état du système quantifié diffuseur ou encore aux chocs élastiques du schéma de Smekal. Pour calculer la diffusion Raman avec changement de fréquence, il faut, comme le suggère ce même schéma, considérer les éléments de matrice non diagonaux tels que :

$$(7) \quad (\mathcal{P}_x)_{lk} = -e \int \Psi_l^* x \Psi_k dx dy dz$$

correspondant aux transitions $k \rightarrow l$. Il est d'ailleurs facile de former cette quantité à l'aide de l'expression (5) de Ψ_k et de l'expression analogue de Ψ_l . En effectuant ce calcul, on trouvera encore, comme dans le calcul de $(\mathcal{P}_x)_{kk}$ des termes constants et des termes en h^{02} qu'on laissera de côté et l'on ne gardera que les termes du premier degré en h^0 contenant ν en exposant. Avec ces simplifications, on trouve :

$$(8) \quad (\mathcal{P}_x)_{lk} = -\frac{e^2 h}{4\pi m \nu} \left\{ \sum_j (x)_{lj} (p_x)_{jk} \left[\frac{e^{2\pi i(\nu_{kl} + \nu)t}}{h\nu_{kj} + h\nu} + \frac{e^{2\pi i(\nu_{kl} - \nu)t}}{h\nu_{kj} - h\nu} \right] \right. \\ \left. + \sum_j (x)_{jk} (p_x)_{jl}^* \left[\frac{e^{2\pi i(\nu_{kl} - \nu)t}}{h\nu_{lj} + h\nu} + \frac{e^{2\pi i(\nu_{kl} + \nu)t}}{h\nu_{lj} - h\nu} \right] \right\}$$

avec toujours $\nu_{lk} = -\nu_{kl} = \frac{E_l - E_k}{h} \dots$

Nous voyons ainsi apparaître les exponentielles en $e^{2\pi i(\nu - \nu_{lk})t}$ et $e^{2\pi i(\nu + \nu_{lk})t}$, c'est-à-dire les fréquences Raman $\nu \pm \nu_{lk}$. Comme pour un état initial donné correspondant à un indice k , on doit considérer toutes les valeurs possibles de l , on obtient bien la totalité des raies Raman. Néanmoins, il y a ici quelque chose de très peu satisfaisant, c'est qu'en partant de l'état initial donné k , nous trouvons à la fois les raies de fréquences $\nu + \nu_{lk}$ et $\nu - \nu_{lk}$, alors que le schéma quantique de Smekal nous montre clairement que nous devrions seulement trouver les raies de fréquences $\nu - \nu_{lk}$, ν_{lk} étant positif ou négatif suivant que E_l est supérieur ou inférieur à E_k . Ceci est très grave car nous perdons ainsi le

bénéfice d'expliquer la différence d'intensité entre les raies Stokes et les raies anti-Stokes. On le voit aisément puisque les deux raies $\nu \pm \nu_{lk}$ paraissent ici émises à partir du même niveau initial E_k . Cette difficulté est un des nombreux signes auxquels on peut reconnaître que la théorie quantique par correspondance n'est pas foncièrement exacte et qu'elle suit de trop près les routes frayées par la théorie électromagnétique.

Pour utiliser la formule (8) sans tomber dans des difficultés relativement aux raies anti-Stokes, on peut alors écrire l'expression de $(\mathcal{E}_x)_{lk}$ en ne gardant que les termes en $e^{2\pi i(\nu - \nu_{lk})t}$ et en disant que ceux-là seuls interviennent si l'état initial est l'état d'énergie minimum ne permettant pas l'émission des raies anti-Stokes. En se souvenant que les matrices x et p_x sont hermitiques, on pourra écrire (8) sous la forme :

$$(9) \quad (\mathcal{E}_x)_{lk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \hbar \nu} e^{2\pi i(\nu - \nu_{lk})t} \cdot \sum_j \left(\frac{x_{lj}(p_x)_{jk}}{\nu_{kj} + \nu} + \frac{(p_x)_{lj}x_{jk}}{\nu_{lj} - \nu} \right).$$

Sur cette formule, on peut lire une particularité importante de l'effet Raman. Comme d'après la formule (51) du chapitre III, $(p_x)_{jk}$ est proportionnel à x_{jk} , les numérateurs des quantités dans la parenthèse sont égaux à $x_{lj} x_{jk}$. Or les règles de sélection sont fondées sur le fait que x_{lj} n'est différent de zéro que si la transition $l \rightarrow j$ correspond à certaines variations des nombres quantiques définissant les états stationnaires. Par exemple, une importante règle de sélection est fondée sur le fait que le nombre quantique azimutal doit varier d'une unité en valeur absolue dans la transition $l \rightarrow j$ pour que x_{lj} diffère de zéro. Donc, pour que le produit $x_{lj} x_{jk}$ diffère de zéro, il faut que chacune des transitions $l \rightarrow j$ et $j \rightarrow k$ corresponde à une variation d'une unité en valeur absolue du nombre quantique azimutal. Il en résulte que la transition $l \rightarrow k$ correspond à une variation de ce nombre quantique égale à 0 ou à ± 2 . La transition de $l \rightarrow k$ est donc exclue par les règles de sélection si la raie Raman correspondante existe avec une intensité non nulle. En généralisant, nous arrivons donc à la règle suivante, tout à fait opposée à celle que nous avons rencontrée dans l'étude de la dispersion : « Les fréquences ν_{lk} qui interviennent dans le spectre Raman sont précisément des fréquences qui sont normalement absentes dans le spectre d'émission du corps considéré. »

La théorie précédente, abstraction faite de la difficulté relative aux raies anti-Stokes, est certainement trop schématique car elle est valable pour un système à un électron alors que les molécules donnant l'effet Raman sont des systèmes beaucoup plus compliqués. Elle donne cependant une sorte de vue globale du phénomène. On peut faire une théorie plus exacte du phénomène, mais elle exige une étude préliminaire des états d'oscillation et de rotation des molécules de façon à pouvoir faire intervenir les fonctions Ψ correspondantes dans le calcul des éléments de matrice. Ces calculs ont été effectués par divers théoriciens, notamment par M. Manneback, et il semble que les prévisions de la théorie soient convenablement vérifiées par les résultats expérimentaux.

CHAPITRE VII

L'EFFET COMPTON

1. Le phénomène de Compton et son interprétation quantique. —

Nous arrivons à l'étude d'un phénomène très important dont la découverte a exercé une action décisive sur l'orientation de la physique théorique contemporaine : le phénomène qui fut mis en évidence par M. H. A. Compton en 1923, c'est-à-dire 4 ans avant la découverte de l'effet Raman. Comme l'effet Raman, l'effet Compton consiste en une diffusion avec changement de fréquence, mais tandis que l'effet Raman s'observe dans le domaine lumineux, l'effet Compton est caractéristique des domaines X et γ . Une autre différence importante entre les deux effets est que, dans la diffusion Raman, chaque raie diffusée a la même fréquence dans toutes les directions, fréquence différant par une constante ν_{ik} de la fréquence incidente, tandis que dans l'effet Compton, la fréquence de la radiation diffusée est variable avec l'angle de diffusion, c'est-à-dire est une fonction de l'angle θ de la direction de propagation de l'onde incidente et de la direction d'observation de l'onde diffusée. Enfin, dans le phénomène de Compton, il y a expulsion d'un électron par la matière diffusante (électron de recul) et cet électron, souvent observable, joue, comme nous allons le voir, un rôle essentiel dans le phénomène.

Les expérimentateurs qui s'occupaient de la diffusion des Rayons X, avaient dès longtemps remarqué que la radiation diffusée paraissait dans l'ensemble plus « molle », c'est-à-dire de fréquence moins élevée, que la radiation incidente. Les expériences plus précises de M. H. A. Compton ont expliqué ce fait en montrant qu'à côté de la diffusion sans changement de longueur d'onde conforme aux prévisions de la théorie électromagnétique de Thomson, il y avait aussi une diffusion avec abaissement de la fréquence. Presque simultanément, MM. Compton et Debye

ont développé une théorie purement quantique de ce nouveau phénomène qui prévoit très exactement la diminution de la fréquence et sa variation avec l'azimut. Cette théorie repose sur la conception des photons dans laquelle le photon de fréquence ν possède l'énergie $h\nu$ et la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$. Elle envisage la diffusion comme un choc entre un des photons incidents et un des électrons contenus dans la matière diffusante. On suppose l'électron initialement au repos. Le choc du photon va alors projeter l'électron avec une certaine vitesse $v = \beta c$ dans une certaine direction faisant l'angle φ avec la direction initiale du photon tandis que celui-ci, par suite du choc, va être dévié de sa route primitive et s'éloignera dans une direction faisant l'angle θ avec la direction d'incidence ; de plus, comme le photon a cédé de l'énergie à l'électron, son quantum final $h\nu_\theta$ sera inférieur à son quantum initial $h\nu_0$ et variera suivant l'angle de déviation θ , d'où résulte l'abaissement de fréquence variable avec l'azimut de la diffusion.

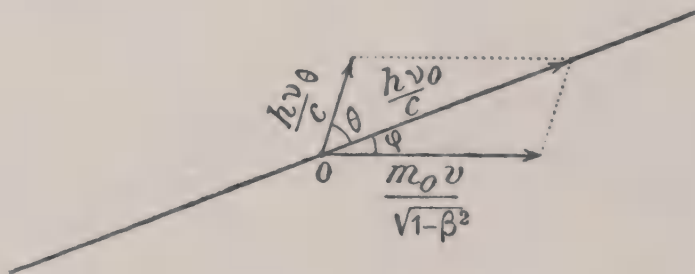


Fig. 9.

Les quatre quantités ν_θ , ν_0 , θ et φ sont liées par les quatre relations que l'on obtient en écrivant qu'il y a dans le choc conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement totale. Nous écrirons ces conservations en utilisant les formules de la Dynamique relativiste, ce qui donne

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{h\nu_0}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \varphi + \frac{h\nu_\theta}{c} \cos \theta \\ 0 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \varphi + \frac{h\nu_0}{c} \sin \theta \\ h\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0 c^2 + h\nu_\theta. \end{array} \right.$$

En éliminant φ entre les deux premières équations (1), on obtient la relation :

$$(2) \quad \left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_\theta}{c}\right)^2 - 2 \frac{h\nu_0}{c} \cdot \frac{h\nu_\theta}{c} \cos \theta = \frac{m_0^2 \nu^2}{1 - \beta^2}$$

formule qui peut se lire directement sur la figure 9.

Nous introduisons ici une notation classique dans cette théorie en posant :

$$(3) \quad \alpha = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0}$$

où $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ est la longueur d'onde de l'onde incidente tandis que

$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ est une longueur caractéristique de l'électron que l'on nomme « la longueur d'onde de Compton ». En éliminant alors la vitesse $\nu = \beta c$ entre l'équation (2) et la dernière équation (1), on trouve :

$$(4) \quad \nu_\theta = \frac{\nu_0}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} = \frac{\nu_0}{1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Telle est la formule qui donne, dans la théorie de Compton-Debye, la fréquence de la radiation diffusée en fonction de la fréquence de la radiation incidente et de l'angle de diffusion.

Comme expérimentalement c'est la longueur d'onde que l'on mesure, il est plus commode pour la comparaison à l'expérience d'introduire les longueurs d'onde et d'écrire :

$$(5) \quad \lambda_\theta = \lambda_0 \left(1 + 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

La variation de la longueur d'onde lors de la diffusion Compton dans la direction θ est donc

$$(6) \quad \delta\lambda_\theta = \lambda_\theta - \lambda_0 = 2\alpha\lambda_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

La longueur d'onde de Compton, grandeur caractéristique de l'électron, est numériquement égale à $0,0242 \cdot 10^{-8} \text{ c.g.s.} = 0,0242 \text{ \AA}$. La variation de longueur d'onde par diffusion Compton, nulle pour $\theta = 0$, croît pour θ croissant, atteint la valeur, $0,0242 \text{ \AA}$ pour $\theta = 90^\circ$ et tend vers $0,0484 \text{ \AA}$ pour θ tendant vers 180° . Ces résultats sont très bien vérifiés par l'expérience et il est très remarquable que la variation de longueur d'onde par effet Compton soit indépendante de la longueur d'onde incidente.

se produit la diffusion Compton. L'électron est animé avant le choc d'une vitesse $v_0 = \beta_0 c$ dont la direction est définie par des cosinus directeurs a_0, b_0, c_0 ; nous appellerons φ_0 l'angle de cette direction avec ox de sorte que $a_0 = \cos \varphi_0$. Après le choc, le photon a la fréquence ν_θ et se propage dans une direction de cosinus directeurs p, q, r faisant l'angle θ avec ox ($\cos \theta = p$) et l'angle ω avec la direction initiale du mouvement de l'électron de sorte que $\cos \omega = a_0 p + b_0 q + c_0 r$. Enfin, après le choc, l'électron possède une vitesse $v = \beta c$ dans une direction dont les cosinus directeurs sont a_1, b_1, c_1 et qui fait l'angle φ avec ox ($\cos \varphi = a_1$).

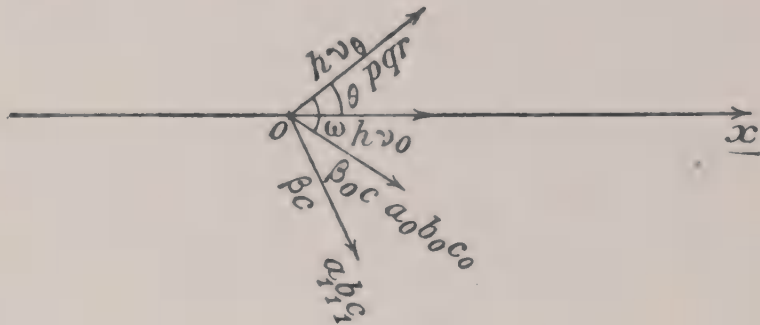


Fig. 11.

La conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement pendant le choc permet d'écrire les équations :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} h\nu_0 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} &= h\nu_\theta + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \frac{h\nu_0}{c} + \frac{m_0 \beta_0 c}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} a_0 &= \frac{h\nu_\theta}{c} p + \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} a_1 \\ \frac{m_0 \beta_0 c}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} b_0 &= \frac{h\nu_\theta}{c} q + \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} b_1 \\ \frac{m_0 \beta_0 c}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} c_0 &= \frac{h\nu_\theta}{c} r + \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}} c_1. \end{aligned} \right.$$

Entre les trois dernières équations (11), on peut éliminer a, b, c par la relation $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Puis entre la relation ainsi obtenue et la première relation (11), on peut ensuite éliminer β . Il vient aisément en employant toujours la définition (3) :

$$(12) \quad \nu_\theta = \nu_0 \frac{1 - \beta_0 \cos \varphi_0}{1 - \beta_0 \cos \omega + 2\alpha \sqrt{1 - \beta_0^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Mais la formule (63) nous donne seulement le rayonnement diffusé total concernant la transition $k \rightarrow l$. Pour un état initial k donné, l peut prendre toutes les valeurs, y compris la valeur k correspondant à la transition identique $k \rightarrow k$. Nous aurons donc pour valeur de l'intensité diffusée au total par l'électron atomique en une unité de temps :

$$(65) \quad I_d = \frac{8\pi e^2}{3m^2 c^4} \cdot \sum_l J_{kl} \cdot I_0.$$

Le théorème de Wentzel consiste en ceci que l'on a :

$$(66) \quad \sum_l J_{kl} = 1,$$

de sorte que (65) nous redonne la formule classique de Thomson, laquelle conduit, nous l'avons vu, à la valeur 0,2 du coefficient massique d'affaiblissement par diffusion $\frac{\sigma}{\rho}$. Ainsi, si nous démontrons le théorème de Wentzel exprimé par la formule (66) nous aurons expliqué pourquoi on trouve pour $\frac{\sigma}{\rho}$ la valeur classique 0,2 même dans le domaine des Rayons X moyens où l'effet Compton est notable.

Avant de démontrer la formule (66), remarquons d'abord que, si nous avons négligé les déphasages introduits par le fait que la longueur d'onde n'est pas grande par rapport aux dimensions de l'atome, nous aurions eu, au lieu de (56),

$$(67) \quad J_{kl} = \left| \int a_l^{0*} a_k^0 d\tau \right|^2 = \delta_{kl},$$

c'est-à-dire que la diffusion serait nulle pour toutes les transitions $k \rightarrow l$ avec $l \neq k$. Autrement dit, nous n'aurions trouvé que la diffusion sans changement de longueur d'onde. L'existence de l'effet Compton est donc liée aux déphasages en question.

Posons maintenant :

$$(68) \quad \eta = \frac{2\pi}{c} (v'u - vz).$$

Nous avons alors :

$$(69) \quad \sum_l J_{kl} = \sum_l \left| \int a_l^{0*} a_k^0 e^{i\eta} d\tau \right|^2.$$

Posons maintenant par définition :

$$(70) \quad f = a_k^0 e^{i\eta}$$

du facteur $q = x$. Un examen des valeurs numériques de ces différents termes pour les Rayons X montre que le dernier de ces termes est toujours beaucoup plus grand que les autres. Cette constatation permet d'abord de négliger $(\mathcal{E}_y)_{ik}$ et $(\mathcal{E}_z)_{ik}$ devant $(\mathcal{E}_x)_{ik}$ ce qui montre l'absence de dépolarisation sensible dans la diffusion Compton des Rayons X moyens, conclusion vérifiée par des expériences de Kallmann et Mark. De plus, nous pouvons, dans l'expression de $(\mathcal{E}_x)_{ik}$ négliger le terme provenant de la dérivée de l'exponentielle, ce qui nous donne avec les notations déjà employées :

$$(60) \quad (\mathcal{E}_x)_{ik} = -\frac{e^2 \hbar^0 i}{8\pi^2 m v^2} \int a_l^{0*} a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{c} (v'u - vz)} dx dy dz \cdot e^{2\pi i v' t}.$$

D'après les formules de la théorie classique de la radiation, on trouve alors pour l'intensité rayonnée en un point situé à grande distance R de l'atome dans une direction faisant l'angle θ avec l'axe des z :

$$(61) \quad \overline{S}_R = \frac{2\pi^3}{c^3} \frac{v'^4}{R^2} \sin^2 \theta |2(\mathcal{E}_x)_{ik}|^2 \\ = \frac{e^4 \hbar^{02} v'^4}{8\pi m^2 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{v^4 R^2} \left| \int a_l^{0*} a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{c} (v'u - vz)} d\tau \right|^2.$$

Cette formule est valable pour une onde incidente polarisée rectilignement dont le vecteur électrique est parallèle à l'axe des x. Si la radiation incidente est non polarisée, « naturelle », on a :

$$(62) \quad \overline{S}_R = \frac{e^4 \hbar^{02}}{8\pi m_0^2 c^3} \cdot \frac{v'^4}{v^4} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{R^2} \cdot \left| \int a_l^{0*} a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{c} (v'u - vz)} d\tau \right|^2$$

d'après un raisonnement déjà plus d'une fois répété.

Dans le domaine des rayons X pas trop durs, les variations de fréquence par effet Compton sont toujours faibles en valeur relative : on peut donc y négliger tous les ν_{kl} devant ν et confondre $\nu' = \nu - \nu_{kl}$ avec ν . Si l'on intègre alors l'expression (62) de \overline{S}_R pour toutes les directions θ sur la sphère de rayon R, on obtient pour l'intensité diffusée totale :

$$(63) \quad I_d = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} J_{kl} \frac{ch^{02}}{4\pi} = \frac{8\pi e^4}{3m^2 c^4} J_{kl} I_0$$

I_0 étant l'intensité $\frac{ch^{02}}{4\pi}$ de l'onde incidente et J_{kl} étant donnée par :

$$(64) \quad J_{kl} = \left| \int a_l^{0*} a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{c} (v'u - vz)} d\tau \right|^2.$$

$F(x, y, z)$ n'étant sensiblement différente de zéro que pour x, y , et z compris entre $-R$ et $+R$, si R désigne une mesure approximative du rayon de l'atome. Pour que l'intégrale de (57) ait une valeur différente de zéro, il faut que l'exponentielle n'ait pas un grand nombre d'oscillations dans les limites du domaine atomique.

Il faut donc que les quantités :

$$(58) \quad \left(\alpha \frac{\nu'}{c} + \alpha' \frac{p}{h} \right) R, \quad \left(\beta \frac{\nu'}{c} + \beta' \frac{p}{h} \right) R, \quad \left(\gamma \frac{\nu'}{c} + \gamma' \frac{p}{h} \right) R - \frac{\nu}{c} R$$

soient au plus de l'ordre de 1. Or, pour les Rayons X moyens, la longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ est sensiblement plus petite que le rayon R de l'atome : les quantités $\frac{h\nu}{c}$ et $\frac{h\nu'}{c}$ sont donc beaucoup plus grandes que $\frac{h}{R}$ et il en résulte que chacune des trois quantités :

$$(59) \quad \alpha \frac{h\nu'}{c} + \alpha' p, \quad \beta \frac{h\nu'}{c} + \beta' p, \quad \gamma \frac{h\nu'}{c} + \gamma' p - \frac{h\nu}{c}$$

est beaucoup plus petite que chacun des termes qui la composent. Ceci exprime précisément la conservation approximative de la quantité de mouvement, conservation qui est d'autant plus exacte que λ est plus petit.

5. Théorème de Wentzel. Comparaison de la diffusion Thomson et de la diffusion Compton : — Nous arrivons maintenant à la démonstration d'un théorème important dû à M. G. Wentzel, théorème qui va nous expliquer pourquoi, dans le domaine des Rayons X moyens, le coefficient d'affaiblissement par diffusion σ_0 fourni par la théorie classique de Thompson est en accord avec l'expérience alors que, dans ce domaine, l'effet Compton se superpose déjà d'une façon notable à la diffusion sans changement de fréquence.

Reprenons tout d'abord l'expression (46) de $(\mathcal{E}_q)_{ik}$. Comme l'opérateur est proportionnel à $\frac{\partial}{\partial x}$, on peut intégrer par parties. Le terme tout intégré étant nul, l'intégration par parties nous donne pour $q = y$ et $q = z$ des expressions de $(\bar{\mathcal{E}}_y)_{ik}$ et de $(\mathcal{E}_z)_{ik}$ contenant un seul terme qui provient de la dérivation par rapport à x de l'exposant de l'exponentielle. Mais pour $(\mathcal{E}_x)_{ik}$, comme alors $q = x$, l'intégration par parties donne deux termes l'un provenant de la dérivation de l'exponentielle, l'autre de la dérivation

et (en valeur absolue) de la quantité de mouvement et ceci suffit pour que nous puissions retrouver les formules de Compton et Debye. Le fait que les conservations ne sont ici qu'approximatives peut se comprendre si l'on remarque que nous avons négligé le mouvement pris lors du choc par le noyau de l'atome.

Des formules précédentes, résulte que la raie Compton n'est pas strictement monochromatique. Son aspect spectroscopique est légèrement diffus et cet aspect diffus doit s'accroître quand k_1 croît par rapport à k_2 , c'est-à-dire, on peut le montrer facilement, quand l'énergie du quantum incident diminue par rapport à l'énergie de liaison initiale de l'électron. C'est bien ce qu'on observe ainsi la raie Compton diffusée par du carbone est nette si la radiation excitatrice est la raie $K\alpha$ de l'Argent à quantum relativement élevé : elle est au contraire diffuse si la radiation incidente est la radiation $K\alpha$ du cuivre à quantum plus petit. Nous verrons plus loin que l'importance relative de l'effet Compton par rapport à l'effet Thomson augmente avec la fréquence pour un diffuseur donné et diminue avec le nombre atomique du diffuseur pour une fréquence donnée. Utilisant ces résultats, M. Wentzel a pu dire que la raie Compton est d'autant plus diffuse qu'elle est plus faible par rapport à la raie Thomson.

Il est intéressant de bien comprendre pourquoi le calcul précédent dû à M. Wentzel permet de retrouver la conservation de la quantité de mouvement. Pour cela, faisons un raisonnement moins rigoureux, mais plus rapide. Partons de la formule (46) donnant $(\mathcal{E}_q)_{ik}$ et supposons que l'état initial de l'atome est un état quantique dont la fonction d'onde a_k^0 n'est sensiblement différente de zéro que dans le domaine intérieur de l'atome tandis que l'état final sera représenté par l'onde plane monochromatique a_l^0 correspondant au mouvement final de l'électron libéré

$$(56) \quad a_l^0 = C e^{\frac{2\pi i}{h} [\omega t - (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) p]}$$

L'onde (56) représente l'électron éjecté avec la quantité de mouvement p dans la direction de cosinus directeurs α' , β' , γ' . Dans ces conditions, on aura en indiquant par le signe \sim la proportionnalité :

$$(57) \quad (\mathcal{E}_q)_{ik} \sim \int F(x, y, z) e^{2\pi i \left[\left(\alpha \frac{v'}{c} + \alpha' \frac{p}{h} \right) x + \left(\beta \frac{v'}{c} + \beta' \frac{p}{h} \right) y + \left(\gamma \frac{v'}{c} + \gamma' \frac{p}{h} - \frac{v}{c} \right) z \right]} dx dy dz$$

et l'exposant dans l'exponentielle sous le signe \int dans (46) est : $\frac{2\pi i}{h} |g| r \cos \theta - (k_1 + ik_2)r$. L'intégrale en r dans $(\mathcal{E})_{ik}$ est donc

$$(53) \quad \int_0^{+\infty} e^{\left[\frac{2\pi i}{h} |g| r \cos \theta - (k_1 + ik_2)r\right]} r^2 dr = \frac{2}{\left[\frac{2\pi i}{h} |g| \cos \theta - (k_1 + ik_2)\right]^3}$$

comme le montre une intégration par parties.

Il reste à intégrer sur θ et sur φ . En posant $a = -(k_1 + ik_2)$ et $b = \frac{2\pi i}{h} |g|$, on a à effectuer une intégration du type :

$$\iint \frac{F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi}{(a + b \cos \theta)^3}$$

On peut développer la fonction F sur la sphère de rayon un en série de fonctions sphériques de la forme $\sum_m c_m P_m^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$ et l'on voit alors tout de suite, en intégrant sur φ , que seuls les termes pour lesquels $m = 0$ donneront une contribution non nulle.

Il reste une somme de termes de la forme $\int_{-1}^{+1} \frac{P_l^0(x)}{(a + bx)^3} dx$ (avec $x = \cos \theta$). Si on intègre, on trouve comme terme essentiel un terme en $(-k_1 - ik_2 + \frac{2\pi i}{h} |g|)^{-2}$. Or k_1 est négligeable devant k_2 si l'énergie de l'électron projeté est grande devant l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome initial : c'est ce que l'on voit aisément sur les formules développées de la théorie de l'atome. On voit alors que l'intensité de l'effet Compton aura un maximum très prononcé pour :

$$(54) \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} |g|$$

ou ce qui revient au même d'après (48) et (51) pour :

$$(55) \quad m\nu_l = \left| \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \right|$$

La formule (55) exprime la conservation en valeur absolue de la quantité de mouvement lors de l'interaction entre le photon et l'électron. Comme, d'autre part, d'après (37) $h\nu'$ est égal à $h\nu - E_i + E_k$ et que E_k est beaucoup plus petit que E_i par hypothèse, on a aussi conservation approximative de l'énergie. Nous retrouvons donc approximativement les conservations de l'énergie

avec :

$$(48) \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} m v_i = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE_i}$$

où v_i et E_i sont la vitesse et l'énergie de l'électron dans l'état où il est libéré du lien atomique. De là, on tire en remarquant que la variation du terme exponentiel domine toutes les autres :

$$(49) \quad p_x(a_i^{0*} a_k^0) = g(\theta, \varphi) \frac{1}{r} e^{-(k_1 + ik_2)r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

Comme la coordonnée q est toujours proportionnelle à r pour θ et φ donnés et que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ est indépendant de r , on a

$$(50) \quad \frac{q}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = f_1(\theta, \varphi)$$

Ceci étant noté, nous avons maintenant à effectuer l'intégration qui figure dans l'expression (46) de $(\mathcal{E}_q)_{ik}$ et, pour ce faire, il est commode de choisir habilement, comme l'a fait M. Wentzel, le système des coordonnées polaires r, θ, φ employé.

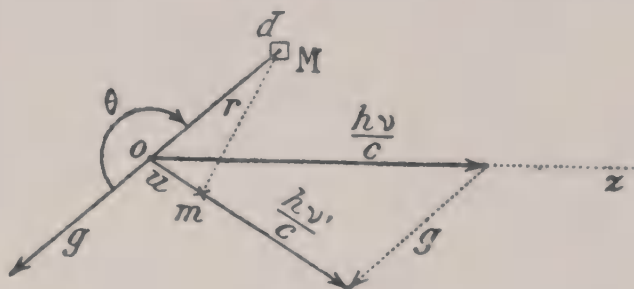


Fig. 14.

Appelons \vec{n} un vecteur unité porté sur la direction oz de l'onde incidente et \vec{n}' un vecteur unité porté sur la direction de diffusion ; soit \vec{g} le vecteur différence géométrique de l'impulsion $\frac{h\nu'}{c}$ du photon diffusé et de l'impulsion $\frac{h\nu}{c}$ du photon incident.

$$(51) \quad \vec{g} = \vec{n}' \frac{h\nu'}{c} - \vec{n} \frac{h\nu}{c}$$

Prenons alors la direction de \vec{g} comme axe polaire : θ sera l'angle que fait la direction de \vec{g} avec le rayon vecteur $r = OM$ allant de l'origine au point d'intégration M. On a visiblement $u = \overline{om} = (\vec{n}' \cdot \vec{r})$ et $z = (\vec{n} \cdot \vec{r})$. D'où :

$$(52) \quad \frac{h\nu'}{c} u - \frac{h\nu}{c} z = \frac{h}{c} (\vec{n}' \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}) = (\vec{g} \cdot \vec{r}) = |g| r \cos \theta$$

nous trouvons aisément par (38) et (39) :

$$(42) \quad (\mathcal{E}_q)_{lk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \nu} \sum_j \left[\frac{(p_x^-)_{lj} Q_{jk}}{\hbar(\nu_{lj} - \nu)} + \frac{Q_{lj} (p_x^-)_{jk}}{\hbar(\nu_{kj} + \nu)} \right] e^{2\pi i \nu' t}$$

Nous pouvons ici introduire l'hypothèse que l'électron atomique a une énergie de liaison faible devant celle du quantum incident, c'est-à-dire que E_k et toutes les autres énergies E_l , y compris l'énergie finale E_l , sont faibles devant les $h\nu$. Cette hypothèse est largement vérifiée pour les rayons X moyens et les éléments légers. On a alors très approximativement :

$$(43) \quad (\mathcal{E}_q)_{lk} = +\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \hbar \nu^2} \sum_j [(p_x^-)_{lj} Q_{jk} - Q_{lj} (p_x^-)_{jk}] e^{2\pi i \nu' t}$$

D'après la définition même des éléments de matrice, on a :

$$(44) \quad \begin{cases} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z} p_x a_k^0 = \sum_m (p_x^-)_{mk} a_m^0 ; & q e^{2\pi i \frac{\nu'}{c} (x + \beta y + \gamma z)} a_k^0 = \sum_j Q_{jk} a_j^0 \\ e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z} p_x a_l^{0*} = \sum_m (-p_x^-)_{lm} a_m^{0*} ; & q e^{2\pi i \frac{\nu'}{c} (x + \beta y + \gamma z)} a_l^{0*} = \sum_j Q_{lj} a_j^{0*} \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément par combinaison :

$$(45) \quad \sum_j [(p_x^-)_{lj} Q_{jk} - Q_{lj} (p_x^-)_{jk}] = - \int q e^{2\pi i \frac{\nu'}{c} (x + \beta y + \gamma z)} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z} p_x (a_l^{0*} a_k^0) d\tau$$

en tenant compte du caractère normal et orthogonal des a_k^0 .

En portant (45) dans (43), on trouve finalement :

$$(46) \quad (\mathcal{E}_q)_{lk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \hbar \nu^2} \int q e^{2\pi i \frac{\nu'}{c} (x + \beta y + \gamma z)} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z} p_x (a_l^{0*} a_k^0) d\tau e^{2\pi i \nu' t}$$

Nous avons dans tout ce calcul admis implicitement que nous avions affaire à un atome à un électron du type de l'atome d'hydrogène. Nous avons à prendre pour a_k^0 la fonction propre correspondant à l'état initial que nous identifierons avec l'état d'énergie minimum et pour a_l^0 une des fonctions propres du spectre continu représentant l'électron libéré du lien atomique. Or on montre dans la théorie de l'atome d'hydrogène que ces fonctions propres peuvent se représenter, du moins à une certaine distance du noyau par les formules :

$$(47) \quad a_k^0 = c e^{-k_1 r} \quad a_l^0 = f(\theta, \varphi) \cdot \frac{e^{-ik_2 r}}{r}$$

Avec ρ_{lk} , nous devons maintenant former les éléments de matrice correspondant aux composantes du moment électrique, c'est-à-dire les $(\mathcal{E}_q)_{lk}$, mais ici va s'introduire le retardement dû à la vitesse finie de la propagation des actions électriques.

Représentons le domaine A formant l'atome et soit P le point très éloigné de A où nous voulons calculer à l'instant t le champ rayonné par la densité ρ_{lk} .

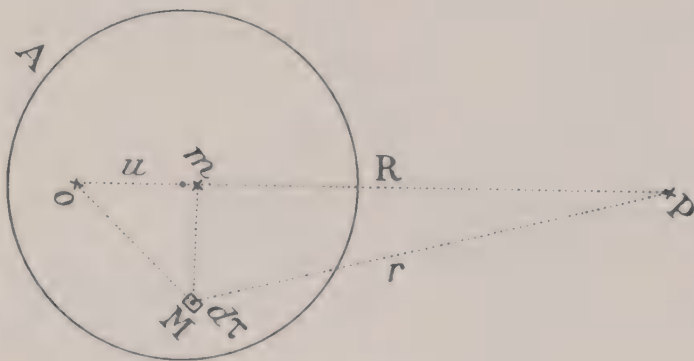


Fig. 13.

O est un point origine quelconque à l'intérieur de l'atome : nous avons supposé le domaine atomique sphérique, mais cette hypothèse n'est nullement nécessaire. Soit ρ_{lk} la densité dans l'élément $d\tau$ qui entoure le point M. D'après la théorie des potentiels retardés, la valeur de ρ_{lk} qui se fait sentir en P au temps t est celle qui correspond au temps $t - \frac{r}{c}$. Or on a très sensiblement, à cause du grand éloignement de P, $r = R - u$ et $t - \frac{r}{c} = t - \frac{R}{c} + \frac{u}{c}$. Le retardement a donc pour effet d'introduire : 1° un facteur de phase en $-\frac{R}{c}$ qui est sans importance ; 2° un facteur $e^{2\pi i \frac{v'}{c} u}$ qui va intervenir d'une façon essentielle dans le calcul du « moment électrique retardé » donné par :

$$(39) \quad (\mathcal{E}_q)_{lk} = \int \Psi_l^*(\rho_{lk})_{t-\frac{r}{c}} q \Psi_k d\tau$$

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de OP. Nous avons :

$$(40) \quad u = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

x, y, z étant les coordonnées de M. Si nous posons :

$$(41) \quad Q_{lk} = \int a_l^0 e^{2\pi i \frac{v'}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z)} q a_k^0 d\tau$$

Si nous étions partis d'un état initial Ψ_l^0 , nous aurions un état perturbé Ψ_l qui se déduirait naturellement de la formule (33) en y changeant k en l . Maintenant nous devons former les éléments de la matrice « moment électrique », mais il va nous falloir aussi ici tenir compte des différences de phase introduites par le fait que les dimensions de l'atome ne sont pas négligeables par rapport à la longueur d'onde.

La charge électrique d'un électron correspond à l'opérateur $-e.1$ et les éléments de la matrice correspondante sont :

$$(34) \quad e_{kl} = -e \int \Psi_k^* \Psi_l d\tau$$

Les densités d'éléments de matrice qui vont jouer le rôle de densité d'électricité dans la théorie quantique, sont donc :

$$(35) \quad \rho_{kl} = -e \Psi_k^* \Psi_l$$

Pour $k = l$, on retrouve la quantité ρ_{kk} densité moyenne de l'électricité pour l'état k . Calculons ρ_{lk} à l'aide des Ψ_k et Ψ_l calculées plus haut. Les seuls termes qui nous intéressent dans l'expression de ρ_{lk} sont ceux qui contiennent ν en exposant de l'exponentielle, les termes en $h\nu^2$ pouvant d'ailleurs être négligés. En se limitant à ces termes et en posant toujours $\frac{E_l - E_k}{h} = \nu_{lk}$, on trouve :

$$(36) \quad \rho_{lk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \nu} \sum_j a_k^0 a_j^{0*} \left[\frac{(p_x^-)_{jl}^* e^{-2\pi i(\nu_{lk} + \nu)t}}{h(\nu_{lj} + \nu)} + \frac{(p_x^+)_{jl}^* e^{2\pi i(\nu - \nu_{lk})t}}{h(\nu_{lj} - \nu)} \right] \\ - \frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \nu} \sum_j a_l^{0*} a_j^0 \left[\frac{(p_x^-)_{jk} e^{2\pi i(\nu - \nu_{lk})t}}{h(\nu_{kj} + \nu)} + \frac{(p_x^+)_{jk} e^{-2\pi i(\nu + \nu_{lk})t}}{h(\nu_{kj} - \nu)} \right]$$

Nous avons donc dans ν_{lk} des exponentielles de fréquences $\nu - \nu_{lk}$ et $\nu + \nu_{lk}$. Employant encore le procédé un peu artificiel qui nous a servi dans l'étude de l'effet Raman, nous laisserons de côté les termes en $\nu + \nu_{lk}$ qui correspondraient, d'après le schéma de Smekal, à des transitions à partir de l'état l . En posant :

$$(37) \quad \nu' = \nu - \nu_{lk}$$

Nous aurons alors simplement après avoir remarqué que d'après les définitions (24) la grandeur $(p_x^+)_{jl}^*$ est égale à $(p_x^-)_{lj}$:

$$(38) \quad \rho_{lk} = -\frac{e^2 \hbar^0}{4\pi m \nu} \sum_j \left[\frac{a_k^0 a_j^{0*} (p_x^-)_{lj}}{h(\nu_{lj} - \nu)} + \frac{a_l^{0*} a_j^0 (p_x^-)_{jk}}{h(\nu_{kj} + \nu)} \right] e^{2\pi i \nu' t}$$

tion propre de l'opérateur Hamiltonien non perturbé H^0 . On a

$$\Psi_k^0 = a_k^0 e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}$$

La présence de l'onde électromagnétique produit dans l'état du système quantifié une petite perturbation de l'ordre du terme perturbateur dans (23) et l'état perturbé peut être représenté par la fonction d'onde :

$$(26) \quad \Psi_k = \Psi_k^0 + \omega_k$$

En substituant cette expression dans (23) et en négligeant les termes de l'ordre du carré de la perturbation :

$$(27) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \omega_k}{\partial t} = H^0(\omega_k) + \frac{eh^0}{4\pi m\nu} [e^{2\pi i \nu t} p_x^- + e^{-2\pi i \nu t} p_x^+] \Psi_k^0$$

Nous pouvons développer ω_k suivant le système des fonctions propres de H_0 :

$$(28) \quad \omega_k = \sum_j c_j(t) \Psi_j^0(x, y, z, t) = \sum_j c_j(t) a_j^0(x, y, z) e^{\frac{2\pi i}{h} E_j t}$$

d'où par substitution dans (27) :

$$(29) \quad \frac{h}{2\pi i} \sum_j \frac{\partial c_j}{\partial t} \Psi_j^0 = \frac{eh^0}{4\pi m\nu} [e^{2\pi i \nu t} p_x^- + e^{-2\pi i \nu t} p_x^+] \Psi_k^0$$

En multipliant par Ψ_i^{0*} et en intégrant, on a :

$$(30) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{eh^0}{4\pi m\nu} [(p_x^-)_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i + h\nu)t} + (p_x^+)_{ik} e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i - h\nu)t}]$$

avec :

$$(31) \quad (p_x^\pm)_{ik} = \int a_i^0 e^{\pm 2\pi i \nu \frac{z}{c}} p_x(a_k^0) dx dy dz$$

En intégrant l'équation (30) avec la condition initiale $c_i(0) = 0$, on obtient :

$$(32) \quad c_i(t) = \frac{eh^0}{4\pi m\nu} \left[\frac{(p_x^-)_{ik} (e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i + h\nu)t} - 1)}{E_k - E_i + h\nu} + \frac{(p_x^+)_{ik} (e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E_i - h\nu)t} - 1)}{E_k - E_i - h\nu} \right]$$

De là, on tire immédiatement :

$$(33) \quad \Psi_k = a_k^0 e^{2\pi i E_k t} + \frac{eh^0}{4\pi m\nu} \sum_j a_j^0 \left[\frac{(p_x^-)_{jk} e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k + h\nu)t}}{E_k - E_j + h\nu} + \frac{(p_x^+)_{jk} e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - h\nu)t}}{E_k - E_j - h\nu} - \frac{(p_x^-)_{jk} (E_k - E_j - h\nu) + (p_x^+)_{jk} (E_k - E_j + h\nu)}{(E_k - E_j)^2 - h^2 \nu^2} e^{\frac{2\pi i}{h} E_j t} \right]$$

de diffusion devient inférieur à sa valeur classique et paraît tendre vers zéro pour ν croissant indéfiniment : elle doit même pouvoir déterminer la forme exacte de la loi de décroissance de ce coefficient.

Pour développer une théorie quantique par correspondance de la diffusion qui contienne l'effet Compton, nous devons développer à nouveau les calculs exposés à l'avant-dernier chapitre, mais en nous affranchissant de l'hypothèse que les dimensions de l'atome sont petites par rapport à la longueur d'onde et en considérant non seulement la transition $k \rightarrow k$ qui correspond à l'effet Thomson, mais aussi les transitions $k \rightarrow l$ correspondant au passage de l'état initial k à un état final l où l'électron atomique se trouve libre à l'extérieur de l'atome. On sait en effet qu'un système atomique quantifié admet des états stationnaires formant une suite discrète et, de plus, une suite continue d'autres états où l'électron est libre à l'extérieur de l'atome : les premiers sont la transposition quantique des trajectoires elliptiques de l'électron autour du noyau dans le modèle de Bohr, tandis que les seconds sont les transpositions des trajectoires hyperboliques d'un électron autour d'un noyau.

Nous partirons toujours de l'équation :

$$(23) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{e}{m} \frac{\hbar^0}{2\pi \nu} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) p_x(\Psi)$$

en supposant que l'onde incidente est rectilignement polarisée avec une vibration électrique parallèle à ox et égale à $\hbar^0 \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right)$, mais cette fois nous ne pouvons plus négliger la variation de z dans le cosinus.

En définissant les deux opérateurs p_x^+ et p_x^- par les relations :

$$(24) \quad p_x^+ = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot e^{2\pi i \nu \frac{z}{c}}; \quad p_x^- = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot e^{-2\pi i \nu \frac{z}{c}}$$

nous pouvons écrire (23) sous la forme :

$$(25) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{e}{m} \frac{\hbar^0}{4\pi \nu} [e^{2\pi i \nu t} p_x^- + e^{-2\pi i \nu t} p_x^+] \Psi$$

Nous partons toujours d'un état initial où l'atome est dans un certain état stationnaire (généralement l'état le plus probable d'énergie minimum) représenté par une fonction d'onde Ψ_k^0 fonc-

Mais en réalité, comme le coefficient d'affaiblissement mesuré expérimentalement correspond à l'ensemble de la diffusion Thomson et de la diffusion Compton, on devrait trouver $2\sigma_0$ et non σ_0 . Nous verrons plus loin l'explication de cette anomalie apparente. Pour les très grandes valeurs de ν , quand α devient de l'ordre de 1, la formule de Compton (mais non celle de Woo) rend compte qualitativement du fait que la diffusion, si l'on suppose alors négligeable la diffusion Thomson, décroît rapidement avec ν de telle sorte que σ devient notablement inférieure à σ_0 pour les rayons X durs et les rayons γ . Nous allons passer maintenant à la théorie quantique par correspondance de l'effet Compton qui éclaire beaucoup de points restés obscurs dans les interprétations précédentes.

4. Théorie quantique par correspondance de l'effet Compton. —

Avant d'aborder l'étude de la théorie quantique par correspondance de l'effet Compton, résumons les résultats expérimentaux dont elle doit nous rendre compte. Elle doit d'abord nous redonner les relations d'énergie et de quantité de mouvement fournies par la théorie purement quantique et bien en accord avec les faits. Puis elle doit nous expliquer pourquoi, dans le domaine des Rayons X moyens, il y a coexistence de l'effet Thomson de diffusion sans changement de fréquence et de l'effet Compton avec changement de fréquence. L'expérience a montré que, pour une même radiation incidente, le rapport de l'intensité de la diffusion Thomson à l'intensité de la diffusion Compton est d'autant plus grand que le diffuseur est plus lourd. Pour le Lithium par exemple la diffusion se fait pratiquement en entier par effet Compton tandis que pour le Cuivre, l'effet Thomson prédomine déjà. Pour un même élément diffuseur et des longueurs d'onde différentes de la radiation incidente, le rapport en question est d'autant plus grand que la fréquence est plus faible : en d'autres termes, plus le quantum de la radiation incidente est grand, plus est accentué le pourcentage de l'effet quantique de diffusion. La théorie a à rendre compte de tous ces faits. Elle doit aussi expliquer pourquoi le coefficient global de diffusion garde la valeur classique de Thomson même quand la diffusion quantique de Compton entre déjà en jeu d'une façon notable. Enfin, la théorie doit expliquer pourquoi, dans le domaine des Rayons X durs et des Rayons γ , le coefficient global

arbitraire puisque cette constante est complètement étrangère à la théorie classique. De plus, cette théorie semi-électromagnétique n'explique pas du tout l'apparition dans la chambre de Wilson des électrons de recul projetés latéralement. La théorie purement quantique de l'effet Compton est donc certainement plus voisine de la vérité. Mais néanmoins, la théorie semi-électromagnétique a l'intérêt de nous montrer que, même pour le phénomène franchement quantique qu'est l'effet Compton, les raisonnements avec la théorie classique ne sont pas dénués de valeur. De plus, elle a permis, comme nous allons l'expliquer, de trouver une première estimation des intensités dans l'effet Compton.

En effet, la théorie purement quantique du phénomène de Compton ne pouvait fournir aucune indication sur les intensités. Mais on a pu, avant le développement de la nouvelle Mécanique, obtenir des formules donnant les intensités par des raisonnements approximatifs de correspondance. Par exemple, en relation avec la théorie semi-électromagnétique que nous venons de résumer, on a égalé le rayonnement global par effet Compton avec celui qu'émettrait d'après la théorie classique un électron animé de la vitesse βc donnée par (20) dans la direction de propagation de l'onde incidente et vibrant sous l'action de cette onde. Grâce à des raisonnements de ce genre, MM. Woo et Compton ont obtenu pour l'intensité diffusée à la distance r dans la direction θ par N électrons subissant l'effet Compton, l'intensité de l'onde incidente étant I_0 , la formule :

$$(21) \quad I = I_0 \frac{Ne^4 \gamma}{2m^2 c^4 r^2} \cdot \frac{[1 + \cos^2 \theta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 - \cos \theta)^2]}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^5}$$

où γ est une constante que Compton pose égale à 1 et Woo égale à $(1 + 2\alpha)$. A partir de cette expression, on peut calculer le coefficient d'affaiblissement par diffusion Compton, le coefficient d'affaiblissement par diffusion Thomson étant $\sigma_0 = \frac{8\pi Ne^4}{3m^2 c^4}$; on trouve ainsi :

$$(22) \quad \sigma = \sigma_0 \quad (\text{Woo}) \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{\sigma_0}{1 + 2\alpha} \quad (\text{Compton})$$

Pour les faibles α , on a donc dans les deux cas $\sigma = \sigma_0$. Ceci pourrait paraître satisfaisant puisque, pour les rayons X moyens, on trouve effectivement par les mesures expérimentales $\sigma = \sigma_0$.

que l'électron diffuseur est animé de la vitesse $\bar{\beta}c = \frac{\alpha c}{1 + \alpha}$ dans la direction de propagation de l'onde incidente et en raisonnant à la manière classique.

Sur cette remarque, on a fondé la tentative théorique suivante : On suppose que, sous l'action de l'onde incidente, l'électron absorbe un quantum $h\nu_0$ et prenne la vitesse $\bar{\beta}c$ dans la direction de l'onde incidente, puis qu'il rayonne ensuite conformément à la théorie classique l'énergie qui reste disponible. On calcule alors comme il suit. Dans un système de référence lié à l'électron, l'onde diffusée est une onde sphérique ayant même fréquence dans toutes les directions. Au contraire, pour l'observateur par rapport auquel l'électron était primitivement au repos, celui-ci a au moment de la diffusion la vitesse $\bar{\beta}c$: pour lui, l'onde diffusée, si elle a au total l'énergie ε , étant entraînée avec la vitesse $\bar{\beta}c$, doit posséder d'après le principe de l'inertie de l'énergie la quantité de mouvement $\frac{W}{c^2} v = \frac{\varepsilon \bar{\beta}}{c}$. Les principes de conservation exigent alors que l'on ait :

$$(19) \quad \begin{cases} h\nu_0 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}} - 1 \right) + \varepsilon \\ \frac{h\nu_0}{c} = \frac{m_0 \bar{\beta} c}{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}} + \frac{\varepsilon \bar{\beta}}{c} \end{cases}$$

d'où on tire aisément en éliminant ε :

$$(20) \quad \bar{\beta} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad \left(\alpha = \frac{h\nu_0}{m_0 c^2} \right)$$

Nous retombons bien sur la valeur (18) et nous voyons que la distribution angulaire des fréquences, calculée classiquement, sera bien donnée par la loi de Compton. Cette théorie semi-électromagnétique a été indiquée par M. C. T. R. Wilson et par MM. Bauer et Francis Perrin. Elle a été ensuite approfondie par MM. Försterling et Halpern. Ces derniers auteurs ont montré que dans la théorie classique, si l'on tient compte de la pression de radiation, on arrive bien à la conclusion que l'électron se met en mouvement dans la direction de l'onde incidente. Mais, pour arriver à prévoir exactement l'effet Compton, il faut naturellement toujours introduire quelque part au cours du raisonnement la constante h de Planck et ceci ne peut être fait que d'une manière tout à fait

sur l'effet Doppler et il y a dégradation du quantum par diffusion en accord avec la règle de Stokes. Nous retombons ici sur les considérations thermodynamiques que nous avons développées au précédent chapitre à propos de l'effet Raman.

3. Théorie pseudo-classique de l'effet Compton. — On a tenté de donner de l'effet Compton des théories se rapprochant des idées classiques. Dans ces tentatives, on est parti de la remarque suivante : Supposons que l'électron diffuseur possède la vitesse $v = \bar{\beta}c$ dans la direction de l'onde incidente de fréquence ν .



Fig. 12.

Un observateur lié à l'électron attribue, par suite de l'effet Doppler, à l'onde incidente une fréquence

$$(16) \quad \nu_1 = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}}{1 + \bar{\beta}}$$

(en tenant compte de la relativité). Si l'électron en mouvement avec la vitesse de translation $\bar{\beta}c$ se met à vibrer avec la fréquence ν_1 sous l'action de l'onde incidente, il rayonnera, suivant la théorie classique, une onde dont la fréquence variera suivant les différentes directions à cause de l'effet Doppler par mouvement de la source. Dans une direction faisant l'angle θ avec la direction d'incidence, la fréquence diffusée sera :

$$(17) \quad \nu_0 = \nu_1 \frac{\sqrt{1 - \bar{\beta}^2}}{1 - \bar{\beta} \cos \theta} = \nu_0 \frac{1 - \bar{\beta}}{1 - \bar{\beta} \cos \theta}$$

Si maintenant nous posons :

$$(18) \quad \bar{\beta} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

α étant la grandeur définie par (3), on retombe sur la formule (4) de Compton. D'où la conclusion : on peut retrouver la distribution angulaire exacte des fréquences dans l'effet Compton en supposant

Si la vitesse initiale de l'électron est nulle ou assez faible pour qu'on puisse négliger β_0 devant 1, on retombe sur la formule (4). Ce cas est usuellement réalisé car la vitesse des électrons dans la matière est très souvent petite par rapport à c et ceci explique pourquoi la formule (4) est pratiquement suffisante.

Si β_0 n'est pas négligeable, on voit que l'effet Compton subsiste, mais amoindri ; de plus, il s'y superpose un effet Doppler exprimé par les termes en φ_0 . Pour étudier cet effet Doppler, il est commode de supposer l'effet Compton négligeable, ce qui a lieu par exemple si ν_0 est faible et α négligeable. On aura alors :

$$(13) \quad \nu_0 = \nu_0 \frac{1 - \beta_0 \cos \varphi_0}{1 - \beta_0 \cos \omega}.$$

Comme alors le mouvement de l'électron est peu perturbé par la diffusion, il est naturel de s'attendre à retrouver l'effet Doppler classique. C'est bien ce qui a lieu. En effet, pour l'électron qui fuit devant la lumière incidente avec la vitesse $\beta_0 c \cos \varphi_0$, la fréquence de l'onde incidente est modifiée par effet Doppler et possède (en tenant compte des termes relativistes) la valeur suivante :

$$(14) \quad \nu' = \nu \frac{1 - \beta_0 \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}.$$

L'électron se met donc à vibrer avec la fréquence ν' sans que son mouvement de translation soit modifié. L'observateur qui reçoit la lumière émise par cet électron vibrant et en mouvement dans une direction qui fait l'angle ω avec la vitesse de l'électron, lui attribue une fréquence égale à :

$$(15) \quad \nu_0 = \nu' \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - \beta_0 \cos \omega},$$

toujours d'après les formules relativistes. En portant dans (15) l'expression (14) de ν' , on retombe bien sur la formule (13).

La formule (12) montre que, par suite de l'effet Doppler, la fréquence du photon peut se trouver augmentée au moment du choc. Il y a alors élévation du quantum contrairement à la règle de Stokes. Mais ceci exige que l'électron ait initialement une grande vitesse (β_0 de l'ordre de 1), ce qui est très rare dans les conditions usuelles de température. Dans ces conditions usuelles, l'électron avant le choc est presque toujours au repos ou animé d'une vitesse faible par rapport à c : l'effet Compton prédomine

lumineuse de fréquence ν , elle va la réfléchir partiellement avec modification de la fréquence car elle est optiquement équivalente à une série de lames semi-transparentes en mouvement dans la direction $\vec{p}' - \vec{p}$. De plus, en raison de l'espacement régulier des maxima de densité, la réflexion ne sera sensible que si la longueur d'onde de la radiation incidente et l'angle d'incidence sur les plans d'égale phase de la distribution électrique sont dans une relation telle qu'il y ait accord de phase entre les ondes réfléchies par les divers maxima de densité (comme dans la théorie de la réflexion des Rayons X par les cristaux).

Pour simplifier l'exposé, nous remarquerons avec M. Schrödinger que si $\frac{W}{c}$, p_x , p_y et p_z sont l'énergie (divisée par c) et les composantes de quantité de mouvement d'un corpuscule, ces quatre quantités forment, comme cela est bien connu, les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. De même, si $\frac{h\nu}{c}$, $\frac{h\alpha}{\lambda}$, $\frac{h\beta}{\lambda}$ et $\frac{h\gamma}{\lambda}$ sont l'énergie (divisée par c) et les composantes de quantité de mouvement d'un photon se progageant dans la direction α, β, γ , ces quantités sont encore les composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps.

Ceci rappelé, nous pouvons choisir un système de référence dans lequel l'onde de densité électrique soit stationnaire. Il suffit pour cela, en partant du système de référence primitivement employé, de prendre un nouveau système qui se meuve par rapport au premier dans la direction $\vec{p}' - \vec{p}$ avec la vitesse $\frac{W' - W}{|\vec{p}' - \vec{p}|}$. Désignons dans ce nouveau système :

par $W^0 p_x^0 p_y^0 p_z^0$ l'énergie et la quantité de mouvement de l'électron dans l'état initial

par $W^0 P_x^0 P_y^0 P_z^0$ l'énergie et la quantité de mouvement du photon dans l'état initial

par $W'^0 p_x'^0 p_y'^0 p_z'^0$ l'énergie et la quantité de mouvement de l'électron dans l'état final

par $W'^0 P_x'^0 P_y'^0 P_z'^0$ l'énergie et la quantité de mouvement du photon dans l'état final.

Il est alors évident que $W'^0 = W^0$, car la fréquence de l'onde de densité électrique (égale à $\frac{1}{h} (W'^0 - W^0)$) est nulle dans notre

fusion Compton. Ces états sont représentés par des ondes Ψ de la forme suivante :

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{état initial:} \quad \Psi = ae^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - p_x x - p_y y - p_z z]} \\ \text{état final:} \quad \Psi' = a'e^{\frac{2\pi i}{h} [W't - p'_x x - p'_y y - p'_z z]}. \end{array} \right.$$

L'onde $\Psi + \Psi'$, formée par la superposition de Ψ et de Ψ' , correspond à la densité électrique moyenne :

$$(53) \quad \rho = e|\Psi + \Psi'|^2 = C^{te} + 2|a| |a'|e \cos \frac{2\pi}{h} [(W' - W)t - (p'_x - p_x)x - (p'_y - p_y)y - (p'_z - p_z)z + \eta' - \eta].$$

η' et η étant les arguments des quantités complexes a et a' .

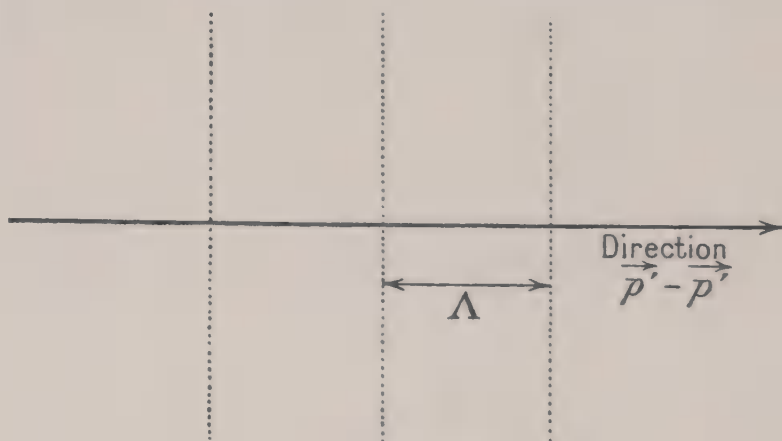


Fig. 17.

D'après (53), il y a donc une distribution périodique d'électricité moyenne qui présente des variations périodiques dans l'espace à un instant donné, ces variations se propageant dans la direction du vecteur $\vec{p}' - \vec{p}$ avec la vitesse $\frac{W' - W}{|\vec{p}' - \vec{p}|}$ de sorte que la fréquence de la variation en chaque point est $\frac{W' - W}{h}$.

Soit Λ la distance de deux maxima consécutifs de ρ à un instant donné : c'est la longueur d'onde de l'onde de densité électrique. Cette longueur d'onde a pour valeur :

$$(54) \quad \Lambda = \frac{h}{|\vec{p}' - \vec{p}|}.$$

Si cette distribution ondulatoire d'électricité reçoit une onde

ordre portant sur 4 fonctions Ψ . La théorie de Dirac, ayant levé beaucoup de difficultés et fourni beaucoup de résultats intéressants, doit être considérée comme la meilleure théorie relativiste et ondulatoire de l'électron que nous possédions. La question s'est donc posée, après le succès de la théorie de Dirac, de reprendre les calculs de M. Gordon en adoptant ce nouveau point de départ. Ceci a été fait par MM. O. Klein et Y. Nishina dans un mémoire très connu ⁽¹⁾.

Nous ne donnerons pas ici les calculs assez longs de MM. Klein et Nishina. Nous donnerons seulement la formule à laquelle ils sont parvenus pour représenter l'intensité de l'onde diffusée par un électron dans la direction θ à partir de la direction d'incidence. Cette formule est la suivante

$$(50) \quad I_{\theta} = I_0 \frac{e^4}{2m^2c^4} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^3} \cdot \left[1 + \frac{\alpha^2(1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]} \right].$$

Elle diffère de celle de Gordon par la présence du dernier crochet. La différence entre les deux formules est donc de l'ordre de α^2 alors que la différence entre la formule de Dirac-Gordon et la formule classique est de l'ordre de α .

En multipliant l'expression (50) par $\frac{v_{\theta}}{v_0} 2\pi R \sin \theta d\theta$ et en intégrant de 0 à π , on obtient le coefficient d'affaiblissement par diffusion rapporté à l'électron ; sa valeur est :

$$(51) \quad \sigma_e = \frac{2\pi e^4}{m^2c^4} \left\{ \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left[\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1 + 2\alpha) \right] + \frac{1}{2\alpha} \log(1 + 2\alpha) - \frac{1 + 3\alpha}{(1 + 2\alpha)^2} \right\}$$

expression qui diffère de l'expression (49) de Dirac-Gordon par des termes de l'ordre de α^2 .

Cette célèbre formule (51) de Klein et Nishina donne pour les rayonnements de fréquences très élevées (Rayons γ) des résultats satisfaisants. Elle a joué un rôle important dans les recherches modernes sur la Physique du noyau.

3. Image de l'effet Compton d'après Schrödinger. — M. Schrödinger a proposé une sorte d'image intuitive de l'interprétation de l'effet Compton par la Mécanique ondulatoire. Considérons l'état initial et l'état final de l'électron dans un processus de dif-

⁽¹⁾ *Zeitschrift für Physik*, t. 52 (1929), p. 853.

Pour les hautes fréquences (α notable), le rayonnement diffusé est donc projeté vers l'avant. C'est bien ce qu'indique l'expérience.

Si nous voulons calculer le coefficient d'affaiblissement par diffusion rapporté à un électron, il pourrait sembler qu'il suffirait d'intégrer la valeur de $\frac{I(\theta)}{I_0}$ donnée par (47) sur toute la surface de la sphère de rayon R comme nous l'avons fait pour la diffusion sans changement de longueur d'onde. Ce serait là une erreur : en effet, quand un photon incident est diffusé, une partie seulement de son énergie se retrouve dans le photon diffusé, le reste passant à l'électron de recul, et il en résulte que, quand l'énergie $h\nu_0$ est absorbée dans l'onde incidente, l'énergie $h\nu_\theta$ seulement passe dans l'onde diffusée. Pour trouver l'affaiblissement par diffusion Compton, il faut donc multiplier $I_c(\theta)$ par le rapport $\frac{\nu_0}{\nu_\theta}$, qui est supérieur à 1, avant d'intégrer sur la sphère de rayon R . Le coefficient d'affaiblissement par électron est donc donné par :

$$(48) \quad \sigma_e = \frac{e^4}{2m^2c^4} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^2} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

En effectuant l'intégration, M. Dirac a trouvé :

$$(49) \quad \sigma_e = \frac{2\pi e^4}{m^2c^4} \times \frac{1 + \alpha}{\alpha} \cdot \left[\frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1 + 2\alpha) \right]$$

On vérifie aisément que, pour α tendant vers zéro, le facteur qui suit le signe \times tend vers la valeur $\frac{4}{3}$ de sorte qu'on retrouve pour σ_e la valeur de Thomson $\frac{8\pi e^4}{3m^2c^4}$ qui doit ainsi être valable pour les longueurs d'onde beaucoup plus grandes que λ_c .

2. La formule de Klein et Nishina. — La forme relativiste primitive de la Mécanique ondulatoire sur laquelle s'appuie la théorie de Gordon, s'est depuis lors montrée insuffisante. M. Dirac y a substitué sa belle théorie de l'électron magnétique qui contient à la fois les effets de Relativité et les effets de spin. Dans cette théorie, au lieu de prendre comme base une équation de propagation d'ondes du second ordre portant sur une seule fonction Ψ comme on le faisait dans la première Mécanique ondulatoire relativiste dont nous nous sommes servis plus haut, on prend pour base un système de 4 équations aux dérivées partielles du premier

D'où, en éliminant ζ' entre (41) et (43)

$$(44) \quad I_c(\theta) = \left(\frac{\nu_\theta}{\nu_0} \right)^3 I_{cl}(\theta)$$

formule qui permet de calculer $I_c(\theta)$ puisque la théorie classique nous fournit $I_{cl}(\theta)$. La relation (44) est ainsi démontrée pour une vibration incidente rectilignement polarisée, mais elle est valable dans le cas général.

En rapprochant (44) de (32), on obtient :

$$(45) \quad I_c(\theta) = \frac{I_{cl}(\theta)}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^3}$$

Considérons le cas où la lumière incidente est « naturelle ». Nous avons vu qu'on a alors.

$$(46) \quad I_{cl}(\theta) = I_0 \cdot \frac{e^4}{2m^2c^4} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot (1 + \cos^2 \theta)$$

En portant dans (45), on trouve donc pour ce cas :

$$(47) \quad I_c(\theta) = I_0 \frac{e^4}{2m^2c^4} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{[1 + \alpha(1 - \cos \theta)]^3}$$

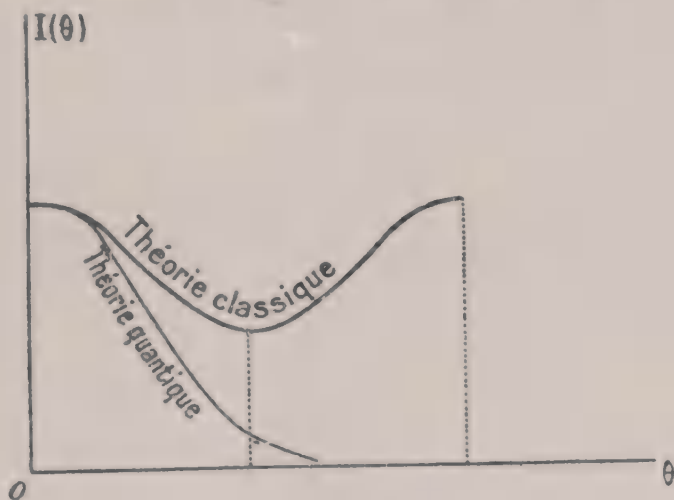


Fig. 16.

I_0 étant l'intensité de la radiation incidente. Telle est la formule obtenue par M. Gordon en accord avec le résultat antérieurement obtenu par M. Dirac.

La formule (47) montre que, pour les valeurs par trop petites de α , le rayonnement vers l'avant, au voisinage de $\theta = 0$, reste celui qui est prévu par la théorie classique, tandis que vers l'arrière, pour $\theta > 90^\circ$, il est très affaibli. On a pour représenter $I(\theta)$ en fonction de θ des courbes comme celles de la fig. 16.

Portant cette valeur (37) dans l'expression (28), on a finalement :

$$(38) \quad A_x' = \frac{e}{2m_0c} \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\nu_0}{\nu_0}\right)^1 T_1 \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{R}{c}\right)$$

et des expressions analogues pour A_y' , A_z' et V' où T_2 , T_3 et T_4 remplacent T_1 . M. Gordon a montré que les T peuvent être considérés comme indépendants de la valeur numérique de la constante de Planck, car cela revient à ajouter à l'expression des potentiels \vec{A}' et V' les composantes d'un gradient d'espace-temps, ce qui, on le sait, n'a pas d'importance. On peut donc écrire :

$$(39) \quad \begin{cases} A_x' = \sqrt{\nu_0} \zeta_1 \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{R}{c}\right); A_z' = \sqrt{\nu_0} \zeta_3 \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{R}{c}\right) \\ A_y' = \sqrt{\nu_0} \zeta_2 \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{R}{c}\right); V' = \sqrt{\nu_0} \zeta_4 \cos 2\pi\nu_0 \left(t - \frac{R}{c}\right) \end{cases}$$

les ζ étant indépendants de la valeur de la constante h .

Ici le raisonnement de M. Gordon devient très élégant. Les champs électromagnétiques de l'onde diffusée doivent s'obtenir par des dérivations à partir des potentiels \vec{A}' et V' et ces dérivations vont évidemment introduire un facteur ν_0 . Donc si \mathcal{A} désigne l'amplitude de l'une quelconque des composantes du champ diffusé, on a :

$$(40) \quad \mathcal{A} = \nu_0^{\frac{3}{2}} \zeta$$

ζ étant une quantité indépendante de la valeur numérique de h . L'intensité de l'onde rayonnée par effet Compton dans la direction θ , étant proportionnelle à la somme des \mathcal{A}^2 , est de la forme :

$$(41) \quad I_c(\theta) = \nu_0^3 \zeta'$$

ζ' étant de nouveau indépendante de la valeur de h . Maintenant, si h était infiniment petit, le changement de fréquence par diffusion serait infiniment faible et l'on retomberait sur la diffusion classique. Si donc $I_a(\theta)$ désigne l'intensité de la diffusion (naturellement sans changement de fréquence) prévue par la théorie classique pour la direction θ , on doit avoir d'après le principe de correspondance :

$$(42) \quad I_a(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} I_c(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} (\nu_0^3 \zeta')$$

Or, quand on fait tendre h vers zéro, ζ' ne varie pas tandis que ν_0 tend vers la valeur ν_0 . Donc :

$$(43) \quad I_a(\theta) = \nu_0^3 \zeta'$$

Ces équations expriment la conservation de la quantité de mouvement lors du choc tandis que la dernière équation (24) exprime la conservation de l'énergie sous la forme :

$$(31) \quad h\nu' = h\nu - m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$$

Si nous remplaçons ν' par la notation plus explicite ν_θ et ν par ν_0 , nous retrouvons les équations qui nous ont servi au début du chapitre précédent pour établir la théorie de Compton-Debye et qui nous ont conduit à la formule :

$$(32) \quad \nu_\theta = \frac{\nu_0}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad \left(\alpha = \frac{h\nu_0}{m_0c^2} \right)$$

Nous devons maintenant évaluer le produit $W' \cdot \Delta'$ qui figure dans la relation (28). Pour cela, écrivons le système des équations (30) et (31) sous la forme suivante :

$$(33) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \varphi + \alpha_\theta \cos \theta \\ 0 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \varphi + \alpha_\theta \sin \theta \\ \alpha = \alpha_\theta + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \end{cases} \quad \left(\alpha_\theta = \frac{h\nu_\theta}{m_0c^2} = \frac{\lambda_c}{\lambda_\theta} \right)$$

où θ et φ ont toujours le sens indiqué sur la figure 9. En multipliant la première équation (33) par $\cos \theta$, la seconde par $\sin \theta$ et ajoutons. Il vient en remarquant que $\omega' = \theta + \varphi$:

$$(34) \quad \alpha \cos \theta = \frac{\beta \cos \omega'}{\sqrt{1-\beta^2}} + \alpha_\theta$$

En combinant la relation (34) avec la dernière équation (33), on trouve ensuite :

$$(35) \quad \frac{1 - \beta \cos \omega'}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \alpha(1 - \cos \theta) = \frac{\nu_0}{\nu_\theta} \quad \text{d'après (32)}$$

En multipliant par m_0c^2 , on obtient ainsi par (29)

$$(36) \quad W' \cdot \Delta' = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} (1 - \beta \cos \omega') = m_0c^2 \frac{\nu_0}{\nu_\theta}$$

et :

$$(37) \quad \frac{1}{\sqrt{W\Delta W'\Delta'}} = \frac{1}{m_0c^2} \left(\frac{\nu_0}{\nu_\theta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, il est évident que $|Z(\vec{p})|^2 dp_x dp_y dp_z$ représentant le nombre probable de particules correspondant à l'intervalle $dp_x dp_y dp_z$, la quantité $\frac{|Z(\vec{p})|^2}{\Delta} dP_x dP_y dP_z$ doit représenter le même nombre de particules. Nous devons donc remplacer $Z(\vec{p})$ par $Z(\vec{P}) = \frac{Z(\vec{p})}{\sqrt{\Delta}}$ et, de même $Z(\vec{p}')$ par $Z(\vec{P}') = \frac{Z(\vec{p}')}{\sqrt{\Delta'}}$. Nous aurons donc finalement :

$$(26 \text{ bis}) \quad A_x' =$$

$$\frac{ec}{2h^3 R} \int \dots \int \frac{T_1 Z(\vec{P}) \cdot Z'(\vec{P}')}{\sqrt{W\Delta \cdot W'\Delta'}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \left[\sum_{xyz} (P_x - P_x') - h\nu' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]} dP_x \dots dP_z' d\tau$$

Mais, comme l'intégration sur xyz ne donne un résultat différent de zéro que si $P_x = P_x'$, $P_y = P_y'$ et $P_z = P_z'$ simultanément, on trouve plus simplement :

$$(27) \quad A_x' = \frac{ec}{2R} \int \frac{T_1 Z(\vec{P}) \cdot Z'(\vec{P}')}{\sqrt{W\Delta \cdot W'\Delta'}} \cos 2\pi\nu' \left(t - \frac{z}{c} \right) dP_x dP_y dP_z$$

Or $|Z(P)|^2 dP_x dP_y dP_z$ et $|Z'(P')|^2 dP_x dP_y dP_z$ doivent être les poids statistiques des états qui se combinent dans l'effet Compton. Nous sommes donc conduits à admettre d'après (27) que le potentiel A_x' correspondant à une transition Compton déterminée est :

$$(28) \quad A_x' = \frac{ec}{2R} \cdot \frac{T_1}{\sqrt{W\Delta \cdot W'\Delta'}} \cos 2\pi\nu' \left(t - \frac{R}{c} \right)$$

On trouve des expressions analogues pour les autres composantes du potentiel avec cette différence que T_2 , T_3 ou T_4 y remplacent T_1 .

Pour obtenir à partir de ces formules générales la théorie de l'effet Compton sur un électron libre *initialement au repos*, nous devons poser :

$$(29) \quad W = m_0 c^2; p = 0; W' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}; p' = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \Delta = 1; \Delta' = 1 - \beta \cos \omega'$$

$v = \beta c$ étant maintenant la vitesse de l'électron de recul et ω' l'angle de cette vitesse avec la direction de diffusion envisagée. La condition $\vec{P} = \vec{P}'$ nous donne alors :

$$(30) \quad \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{h\nu'}{c} \alpha = 0; \quad \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{h\nu'}{c} \beta = 0; \quad \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{h\nu'}{c} \gamma = \frac{h\nu}{c}$$

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la droite OM, on peut poser :

$$(23) \quad r = R - (\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

très approximativement. Nous devons remplacer r par la valeur (23) dans l'argument $t - \frac{r}{c}$ tandis qu'il suffit de remplacer r par R au dénominateur de (22). Posons alors avec M. Gordon :

$$(24) \quad \begin{cases} P_x = p_x - \frac{W + h\nu}{c} \alpha; & P_y = p_y - \frac{W h\nu}{c} \beta; & P_z = p_z - \frac{W + h\nu}{c} \gamma + \frac{h\nu}{c} \\ P'_x = p'_x - \frac{W'}{c} \alpha; & P'_y = p'_y - \frac{W'}{c} \beta; & P'_z = p'_z - \frac{W'}{c} \gamma \\ \nu' = \frac{W - W' + h\nu}{h} \end{cases}$$

On trouve alors comme exposant de l'exponentielle qui, d'après (22) et (20) figure dans A_x :

$$- \frac{2\pi i}{h} \left[\sum_{xyz} (P_x - P'_x) - h\nu' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]$$

et l'on peut écrire :

$$(25) \quad A_x' = \frac{ec}{2h^3 R} \Re \int \dots \int \frac{T_1 Z(\vec{p}) Z(\vec{p}')}{\sqrt{WW'}} e^{-\frac{2\pi i}{h} \left[\sum_{xyz} (P_x - P'_x) - h\nu' \left(t - \frac{R}{c} \right) \right]} dp_x \dots dp'_z$$

Ici M. Gordon introduit un artifice qui consiste à prendre les P et les P' comme variables d'intégration à la place des p et des p' .

Si \vec{v} désigne la vitesse qui, dans la Mécanique relativiste, correspond à la quantité de mouvement \vec{p} pour l'électron, on trouve aisément que le déterminant fonctionnel des p par rapport aux P est égal à $\frac{1}{1 - \frac{v}{c} \cos \omega}$, ω étant l'angle entre la vitesse \vec{v} et la direc-

tion α, β, γ . De même, le déterminant fonctionnel des p' par rapport aux P' est égal à $\frac{1}{1 - \frac{v'}{c} \cos \omega'}$, v' étant la vitesse corres-

pondant à la quantité de mouvement p' et ω' l'angle de \vec{v}' avec OM. Si donc nous posons :

$$(26) \quad \Delta = 1 - \frac{v}{c} \cos \omega; \quad \Delta' = 1 - \frac{v'}{c} \cos \omega'$$

nous devons remplacer $dp_x \dots dp'_z$ par $\frac{dP_x \dots dP'_z}{\Delta \Delta'}$.

Ainsi donc, une solution quelconque de (8) peut s'écrire sous la forme :

$$(19) \quad \Psi = \text{Cte} \int \frac{Z(\vec{p})}{\sqrt{W(\vec{p})}} e^{\frac{2\pi i}{h} S(\vec{p})} dp_x dp_y dp_z$$

Partant de l'expression (19), c'est une simple question de calcul de former, d'après (5) la valeur de ρu_x par exemple. En se bornant aux termes du premier ordre en A_0 , on trouve :

$$(20) \quad \rho u_x = \text{Cte} \Re \iint \frac{1}{\sqrt{WW'}} T_1 e^{\frac{2\pi i}{h} [(W-W')t - (p_x - p'_x)x - (p_y - p'_y)y - (p_z - p'_z)z + h\nu(1 - \frac{z}{c})]} \\ \times Z(\vec{p}) Z(\vec{p}') dp_x dp_y dp_z dp'_x dp'_y dp'_z$$

avec la valeur suivante de T_1 :

$$(21) \quad T_1 = c \frac{p_x + p'_x}{h\nu_0} \left(\frac{p_x}{p_z - \frac{W}{c}} - \frac{p'_x}{p'_z - \frac{W'}{c}} \right) + 2$$

Le symbole \Re signifie « partie réelle de ».

On trouve des expressions analogues à (20) pour ρ_y , ρ et ρ_z avec d'autres quantités T_2 , T_3 et T_4 à la place de T_1 .

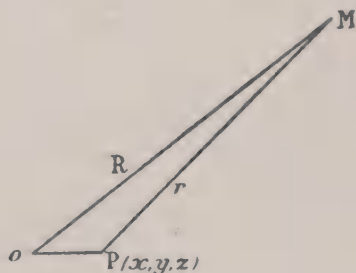


Fig. 15.

Pour calculer les potentiels créés par ces distributions moyennes d'électricité et en déduire le rayonnement, nous devons calculer des expressions telles que :

$$(22) \quad A_x'(M) = -\frac{e}{c} \int \frac{[\rho u_x]_{t-\frac{r}{c}}}{r_{PM}} d\tau_P$$

Nous supposons le point M où l'on calcule le potentiel très éloigné du centre de la distribution moyenne et nous posons $\overline{OM} = R$.

à l'aide des formules (11), (13) et (14) et cette solution est bien déterminée, à un facteur constant près, si l'on se donne le vecteur \vec{p} puisque W est déterminé à partir de \vec{p} par la relation (10). La solution correspondant à une valeur donnée de \vec{p} peut s'écrire, si l'on néglige toujours les termes d'ordre supérieur au premier en A_0 , sous la forme :

$$(15) \quad \Psi(\vec{p}) = a(\vec{p}) e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - p_x x - p_y y - p_z z]} \\ \left[1 + \frac{e A_0 p_x}{4\pi i v_0 \left(p_z - \frac{W}{C} \right)} \left(e^{2\pi i v \left(t - \frac{z}{c} \right)} - e^{-2\pi i v \left(t - \frac{z}{c} \right)} \right) \right]$$

Les fonctions Ψ ainsi obtenues fournissent un système « complet » de solutions de l'équation des ondes en présence de la radiation incidente, système qui se ramène au système des ondes planes, monochromatiques (9) quand A_0 tend vers zéro, comme cela doit être.

Il faut maintenant normer les solutions (15) par un choix convenable des constantes $a(\vec{p})$. Cette opération doit s'effectuer de façon que si :

$$(16) \quad \Psi = \int Z(\vec{p}) a(\vec{p}) e^{\frac{2\pi i}{h} S(\vec{p})} dp_x dp_y dp_z$$

est une solution quelconque de l'équation (8), obtenue par superposition de solutions du type (15), la quantité $|Z(\vec{p})|^2 dp_x dp_y dp_z$ soit la probabilité de trouver l'électron dans un état énergétique correspondant à l'intervalle $dp_x dp_y dp_z$. Pour cela, il faut évidemment que l'on ait :

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(\vec{p})|^2 dp_x dp_y dp_z = 1$$

Dans son mémoire, M. Gordon démontre que l'on doit poser :

$$(18) \quad a^2(\vec{p}) = \frac{\text{Cte}}{W(\vec{p})}$$

la constante ayant une valeur qu'il n'est pas utile d'explicitier ici. On peut voir d'ailleurs que la proportionnalité de a^2 à $\frac{1}{W}$ vient de la présence de dérivées partielles par rapport au temps dans l'expression (5) de ρ .

présence de l'onde incidente assez faible pour qu'on puisse négliger les termes en A^2 . L'équation (3) devient alors :

$$(8) \quad \square \Psi - \frac{4\pi i}{h} \frac{e}{c} A_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} \Psi = 0.$$

En l'absence de lumière incidente, le second terme de (8) serait nul et on aurait pour solutions les ondes planes monochromatiques de la forme :

$$(9) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} [Wt - p_x x - p_y y - p_z z]}$$

les constantes W , p_x , p_y et p_z étant liées par la relation :

$$(10) \quad \frac{W^2}{c^2} - (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = m_0^2 c^2.$$

Ces ondes planes (9) représentent alors les mouvements rectilignes et uniformes de l'électron, en l'absence de champ, mouvements où l'énergie et l'impulsion sont liées par la relation relativiste (10).

Mais la présence de l'onde lumineuse se traduit par la présence du second terme dans (8). Cherchons alors une solution de la forme :

$$(11) \quad \Psi = a e^{\frac{2\pi i}{h} S}$$

où a est une constante, solution généralisant la forme (9). En substituant (11) dans (8), nous obtenons une équation en S :

$$(12) \quad \frac{2\pi i}{h} \square S - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \sum_{xyz} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{8\pi^2}{h^2} \frac{e}{c} A_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{4\pi^2 m_0^2 c^2}{h^2} = 0.$$

Essayons de prendre :

$$(13) \quad S = Wt - p_x x - p_y y - p_z z + C \sin 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

En portant (13) dans (12) et en tenant compte de la relation, on voit par des calculs faciles que (13) est solution de (12) si l'on a :

$$(14) \quad C = \frac{\frac{e}{c} A_0 p_x}{2\pi \nu \left(p_z - \frac{W}{c} \right)}.$$

Donc, nous obtenons une solution de l'équation perturbée (8)

En développant l'équation (2), on obtient en tenant compte de la relation de Lorentz entre les potentiels :

$$(3) \quad \square \Psi + \frac{4\pi i \varepsilon}{h c} \sum_{xyz} A_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{4\pi i \varepsilon}{h c^2} V \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{c^2} (A^2 - V^2) + m_0^2 c^2 \right] \Psi = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second degré que l'on a considérée, au début du développement de la Mécanique ondulatoire, comme étant l'équation d'ondes de la Mécanique ondulatoire relativiste.

De cette équation (3), on déduit facilement la relation de continuité :

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\rho u} = 0,$$

avec les définitions :

$$(5) \quad \begin{cases} \rho = -\frac{h}{4\pi i m_0 c} \left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \frac{\varepsilon V}{m_0 c^2} \Psi \Psi^* \\ \vec{\rho u} = \frac{h}{4\pi i m_0} (\Psi \operatorname{grad} \Psi^* - \Psi^* \operatorname{grad} \Psi) - \frac{\varepsilon}{m_0 c} \vec{A} \Psi \Psi^*. \end{cases}$$

On peut donc considérer ρ comme la densité de probabilité de présence, remplaçant le $\Psi \Psi^*$ de la Mécanique ondulatoire non relativiste, et $\vec{\rho u}$ comme la densité de courant de probabilité. En multipliant les expressions (5) par ε , on obtiendra donc la densité moyenne d'électricité et la densité moyenne de courant électrique. Conformément au principe de correspondance, nous devons prendre comme potentiels créés par ces densités moyennes les expressions :

$$(6) \quad V = \varepsilon \int \frac{[\rho]}{r} d\tau; \quad \vec{A} = \frac{\varepsilon}{c} \int \frac{[\vec{\rho u}]}{r} d\tau,$$

les crochets indiquant que ces potentiels sont retardés.

Ces principes admis, nous allons appliquer l'équation (3) au cas d'un électron de charge $\varepsilon = -e$ soumis à l'action d'une onde lumineuse incidente que nous supposons rectilignement polarisée. Nous savons qu'avec un choix convenable des axes, nous pouvons représenter cette onde incidente par les potentiels :

$$(7) \quad V = A_y = A_z = 0 \quad A_x = A_0 \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right).$$

Nous supposons la perturbation exercée sur l'électron par la

CHAPITRE VIII

L'EFFET COMPTON (suite)

1. Théorie ondulatoire relativiste de l'effet Compton sur électron libre (Gordon). — Pour exposer la théorie de M. Gordon, nous devons d'abord développer quelques remarques préliminaires. La théorie voulant être relativiste, il faut partir d'une équation d'ondes relativiste. M. Gordon a employé l'équation d'ondes relativiste à une fonction Ψ que l'on connaissait déjà à l'époque où il écrivait son mémoire (1926) et qui depuis a été abandonnée en faveur des équations à 4 fonctions Ψ de la théorie de l'électron magnétique de Dirac. Pour établir cette équation d'ondes, rappelons qu'en Mécanique relativiste, la relation entre l'énergie et les moments de Lagrange pour un corpuscule de masse propre m_0 et de charge électrique ε dans un champ défini par les champs électromagnétiques V et \vec{A} est :

$$(1) \quad \frac{1}{c^2} (W - \varepsilon V)^2 - \sum_{xyz} (p_x + \frac{\varepsilon}{c} A_x)^2 - m_0^2 c^2 = 0.$$

Dans le premier membre de cette équation, remplaçons W par $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$ et p_x , p_y et p_z comme d'habitude par $-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}$ etc. Appliquons ensuite l'opérateur ainsi obtenu à la fonction d'onde Ψ ; nous trouvons comme équation d'ondes relativiste :

$$(2) \quad \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon V \right)^2 - \sum_{xyz} \left(-\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c} A_x \right)^2 - m_0^2 c^2 \right] \Psi = 0.$$

Cette équation d'ondes est obtenue à partir de la relation relativiste entre l'énergie et les moments exactement comme l'équation d'ondes relativiste, dont nous nous étions servi jusqu'ici, avait été obtenue à partir de la relation Hamiltonienne entre l'énergie et la quantité de mouvement.

Si l'on considère des Rayons X de plus en plus durs, leur longueur d'onde diminue et se rapproche de la longueur d'onde de Compton λ_c . Il arrive un moment où l'on ne peut plus considérer $\frac{\nu - \nu_{lk}}{\nu}$ comme voisin de 1. Si l'on se reporte à la formule (62) donnant \overline{S}_R , on voit alors que, toutes choses égales d'ailleurs, le rayonnement diffusé par effet Compton doit alors diminuer par suite de la décroissance de la valeur du facteur $\left(\frac{\nu'}{\nu}\right)$. Comme d'autre part, pour ces fréquences élevées, le rayonnement diffusé avec changement de longueur d'onde est prépondérant, on déduit aisément des formules précédentes que le rayonnement diffusé total tombe au-dessous de sa valeur classique et diminue quand ν augmente. On comprend donc ainsi pourquoi la valeur réelle du coefficient d'affaiblissement par diffusion devient plus petite que la valeur classique $\frac{\sigma}{\rho} = 0,2$ dans le domaine des Rayons X durs et des Rayons γ et pourquoi l'écart augmente avec la fréquence.

Pour faire une théorie exacte, il faut se servir de formules de Mécanique ondulatoire relativiste à cause de la grande vitesse des électrons de recul, ce qui complique les calculs. Mais pour les très hautes fréquences du rayonnement incident, l'énergie de liaison des électrons intraatomiques devient faible devant le quantum de la lumière incidente de sorte qu'on doit pouvoir faire une théorie approximative du phénomène en considérant l'électron comme libre. Il est donc intéressant d'avoir une théorie ondulatoire relativiste de l'effet Compton sur électron libre d'autant plus qu'une telle théorie correspond à la théorie purement quantique de Compton et Debye. Cette théorie indiquée sous la forme matricielle par MM. Breit et Dirac, a été développée par M. Gordon dans le cadre de la Mécanique ondulatoire. Nous allons en faire l'étude.

Il est visible que f est normée puisque a_k^0 l'est. D'autre part, f peut se développer suivant le système des fonctions propres de l'Hamiltonien non perturbé sous la forme :

$$(71) \quad f = \sum_l A_{lk} a_l^0,$$

et il est visible que A_{lk} est précisément égal à l'intégrale qui figure dans (69). Or on a évidemment :

$$(72) \quad 1 = \int |f|^2 d\tau = \sum_{lm} \int A_{lk}^* a_l^{0*} \cdot A_{mk} a_m^0 d\tau = \sum_{lm} A_{lk}^* A_{mk} \delta_{lm} \\ = \sum_l |A_{lk}|^2.$$

Le dernier membre de (72) étant précisément égal à $\sum_l J_{kl}$, le théorème de Wentzel est démontré.

D'après ce qui précède, on voit que, plus les dimensions de l'atome sont grandes par rapport à la longueur d'onde de l'onde incidente, plus l'effet Compton prend d'importance par rapport à l'effet Thomson. Il est évident que, l'effet Thomson étant proportionnel à $|F_{kk}|^2$, l'effet Compton est d'après le théorème de Wentzel proportionnel à la quantité à $1 - |F_{kk}|^2$. Le rapport $\frac{1 - |F_{kk}|^2}{|F_{kk}|^2}$ donne donc le rapport des intensités des deux phénomènes de diffusion. On peut évaluer F_{kk} en se servant des fonctions d'onde connues de l'atome d'hydrogène. On trouve ainsi :

$$(73) \quad \frac{1 - |F_{kk}|^2}{|F_{kk}|^2} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\lambda_c \lambda_k}{2\lambda^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 - 1,$$

où λ_k est la longueur d'onde $\frac{hc}{E_k}$ correspondant à l'énergie E_k , λ_c la longueur d'onde de Compton et λ la longueur d'onde de l'onde incidente. Cette formule paraît représenter convenablement les faits. Sans insister sur la vérification quantitative d'une formule qui ne peut être qu'approchée, nous voyons qu'au moins qualitativement, la théorie explique par la formule (73) pourquoi l'importance relative de la diffusion avec changement de fréquence augmente avec la fréquence pour un élément donné (λ_k constant et λ variable) et diminue avec le nombre atomique croissant pour une fréquence donnée (λ constant et λ_k variant à peu près en raison inverse du carré du nombre atomique).

A grande distance de l'atome, la forme $f(r)$ a, nous l'avons vu, la forme asymptotique $\frac{C}{r} e^{-\frac{2\pi i}{h} \sqrt{2m(h\nu + E_k)} r}$, d'où pour $\Psi_{1,1}$ la forme asymptotique :

$$(35) \quad \Psi_{1,1}(E_k + h\nu) = C \sin \theta \cos \varphi \frac{e^{\frac{2\pi i}{h} [(E_k + h\nu)t - \sqrt{2m(E_k + h\nu)} r]}}{r} \text{ pour } r \rightarrow \infty.$$

L'expression (35) représente une onde sphérique divergente et correspond à l'émission de photoélectrons d'énergie $h\nu + E_k$. D'après les principes de la Mécanique ondulatoire, la probabilité pour qu'un photoélectron soit projeté dans la direction θ, φ est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde Ψ pour cette direction, donc proportionnelle à $(\sin \theta \cos \varphi)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$. Si l'on remarque alors sur la figure 19 que l'on a $\sin \theta \cos \varphi = \cos \omega$, on voit que cette probabilité est proportionnelle à $\cos^2 \omega$. C'est bien le résultat attendu.

De là, on conclurait comme précédemment que le nombre des photoélectrons projetés dans les directions faisant des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$ avec l'axe oz est proportionnel à $\sin^2 \theta$, conformément au résultat expérimental de M. Pierre Auger.

4. Cas des Rayons X assez durs. — Pour les rayons X durs, on ne peut plus négliger les variations de l'exponentielle $e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z}$ dans le calcul de $(p_x^-)_{E, l, m; k}$.

Nous traiterons ici le cas des Rayons pas trop durs pour lesquels on peut encore se contenter de poser :

$$(36) \quad e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z} = 1 - 2\pi i \frac{\nu}{c} z = 1 - 2\pi i \frac{\nu}{c} r \cos \theta \text{ (à l'intérieur de l'atome)}$$

L'onde du spectre continu émise sous l'influence de la radiation incidente est de la forme :

$$(37) \quad \Psi_{ph} \sim \sum_{lm} (p_x^-)_{h\nu + E_k, l, m; k} \Psi_{lm}(h\nu + E_k) = \\ = \sum_{lm} \int a_{lm}^*(h\nu + E_k) [1 - 2\pi i \frac{\nu}{c} r \cos \theta] \left(-\frac{h}{2\pi i} \right) \frac{\partial a_k}{\partial x} d\tau \cdot \Psi_{lm}(h\nu + E_k)$$

le signe \sim indiquant la proportionnalité.

Comme nous l'avons vu plus haut, le premier terme du crochet donne dans la somme Σ un seul terme de la forme $A_0 \Psi_{1,1}(h\nu + E_k)$. Quant au second terme du crochet, on peut montrer d'une façon

La forme de l'intégrale en φ montre tout de suite que cette intégrale n'est différente de zéro que : 1° si m est égal à 1 ; 2° si l'on choisit le cosinus dans l'expression de $\Psi_{lm}(E)$. Si ces conditions sont réalisées, l'intégrale égale à $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$ vaut π . Si l'intégrale en φ est différente de zéro, l'intégrale en θ a la forme : $\int_0^\pi P_l^1(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta$. Or les polynômes associés de Legendre sont définis par la formule :

$$(28) \quad P_l^m(u) = (\sqrt{1-u^2})^m \frac{d^m}{du^m} (P_l(u)) \quad (u = \cos \theta),$$

où $P_l(u)$ est le l^{e} polynôme de Legendre. Pour $l = m = 1$, on a donc :

$$(29) \quad P_1^1(u) = \sqrt{1-u^2} \frac{d}{du} (P_1(u)),$$

ou :

$$(29 \text{ bis}) \quad P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta \frac{d}{d \cos \theta} (P_1(\cos \theta)).$$

Mais il est bien connu que $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ de sorte que :

$$(30) \quad P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta.$$

L'intégrale en θ que nous avons à étudier peut donc s'écrire :

$$(31) \quad \int_0^\pi P_l^1(\cos \theta) P_1^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Or les polynômes associés de Legendre forment un système de fonctions orthogonales sur la sphère de rayon un, c'est-à-dire que l'on a :

$$(32) \quad \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_{l'}^{m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (\text{sauf si } l = l' \text{ et } m = m')$$

Pour que notre intégrale (21) soit différente de zéro, il faut donc que $l = 1$.

Bref, avec les Rayons X mous, la seule transition photoélectrique dont la probabilité soit différente de zéro est la transition :

$$(33) \quad \Psi_k \rightarrow \Psi_{1,1}(h\nu + E_k),$$

$\Psi_{1,1}(h\nu + E_k)$ étant pris avec le cosinus dans l'expression (25). Or, en prenant ainsi le cosinus dans (25), nous avons :

$$(34) \quad \begin{aligned} \Psi_{1,1}(h\nu + E_k) &= f_{E_k + h\nu, l}(r) P_1^1(\cos \theta) \cos \varphi e^{\frac{2\pi i}{h} (h\nu + E_k)t} \\ &= f_{E_k + h\nu, l}(r) \sin \theta \cos \varphi e^{\frac{2\pi i}{h} (h\nu + E_k)t}. \end{aligned}$$

initial Ψ_k est un état correspondant à un quantum azimutal nul, un état s comme disent les spectroscopistes. C'est le cas notamment pour l'état de moindre énergie, l'état K. On a alors :

$$(21) \quad \Psi_k = g(r) e^{\frac{2\pi i}{h} E_k t}; \quad a_k = g(r).$$

c'est-à-dire que Ψ_k est indépendant des angles θ et φ et possède la symétrie sphérique. Nous aurons alors à calculer la grandeur.

$$(22) \quad (p_x)_{E_k + h\nu, l, m; k} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} a_{lm}^*(E_k + h\nu) p_x(a_k) dx dy dz.$$

Mais ici il nous faut distinguer le cas des Rayons X mous et celui des Rayons X plus durs. Nous allons consacrer un paragraphe à chacun de ces deux cas.

3. Cas des Rayons X mous. — Par définition, nous appelons Rayons X mous ceux dont la longueur d'onde est grande par rapport aux dimensions atomiques : l'exponentielle $e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z}$ est alors sensiblement constante dans toute l'étendue de l'atome et, en plaçant l'origine au centre de l'atome, nous pouvons la prendre égale à 1. On a alors :

$$(23) \quad p_x(a_k) = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial a_k}{\partial x} = -\frac{h}{2\pi i} g'(r) \frac{x}{r} = -\frac{h}{2\pi i} g'(r) \sin \theta \cos \varphi$$

et, par suite, d'après (22) :

$$(24) \quad (p_x)_{E_k + h\nu, l, m; k} = -\frac{h}{2\pi i} \cdot \int a_{lm}^*(E_k + h\nu) g'(r) \sin \theta \cos \varphi \cdot 2\pi r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr.$$

Or, nous avons vu que :

$$(25) \quad a_{lm}(E_k + h\nu) = f_{E, l}(r) P_l^m(\cos \theta) \cdot \frac{\sin}{\cos} m\varphi.$$

D'où :

$$(26) \quad (p_x)_{E_k + h\nu, l, m; k} = C^{te} \int_{-\infty}^{+\infty} g'(r) f(r) r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\sin}{\cos} m\varphi d\varphi \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

En explicitant les valeurs de $f(r)$ et de $g'(r)$, on peut voir que la première intégrale est convergente. Elle est égale à une constante et nous pouvons écrire

$$(27) \quad (p_x)_{E_k + h\nu, l, m; k} = C^{te} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \frac{\sin}{\cos} m\varphi d\varphi \cdot \int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta.$$

Pour t croissant, l'intégrale précédente tend vers une constante, si toutefois l'intervalle ΔE ne contient pas la valeur $E = E_k + h\nu$, à cause de l'oscillation de plus en plus rapide du cosinus en fonction de E . Donc, pour t tendant vers l'infini, on a asymptotiquement :

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} P_{lm}(E, t) \Delta E \right) = 0 \text{ si } h\nu + E_k \text{ est extérieur à } \Delta E.$$

Si, au contraire, l'intervalle ΔE contient la valeur $E = E_k + h\nu$ on aura :

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} P_{lm}(E, t) \Delta E \right) = \frac{e^2 h^2}{4\pi m^2 h \nu^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \left| (p_x^-)_{E_k + h\nu, l, m; k} \right|^2 \rho_{lm}(E_k + h\nu) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{1 - \cos ut}{u^2} du \right)$$

en posant $u = \frac{2\pi}{h} (E_k + h\nu - E)$; ou encore en posant $\nu = ut$:

$$(19) \quad \pi_{lm}(E, t) = \frac{e^2 h^2}{4\pi m^2 h \nu^2} \left| (p_x^-)_{E_k + h\nu, l, m; k} \right|^2 \rho_{lm}(E_k + h\nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos \nu}{\nu^2} d\nu \\ = \frac{e^2 h^2}{4\pi m^2 h \nu^2} \left| (p_x^-)_{E_k + h\nu, l, m; k} \right|^2 \rho_{lm}(E_k + h\nu).$$

On peut donc dire : 1° que la probabilité par unité de temps pour l'électron atomique de passer dans l'état $\Psi_{lm}(E)$ n'est différente de zéro que si l'on a très sensiblement $E = E_k + h\nu$; 2° que, dans ce dernier cas, la probabilité de passage par unité de temps est proportionnelle à $|(p_x^-)_{E_k + h\nu, l, m; k}|^2$.

La première de ces conclusions nous donne la loi photoélectrique d'Einstein. En effet, E_k qui est négatif n'est pas autre chose que le travail changé de signe qu'il faut fournir pour extraire l'électron sans vitesse de l'atome à partir de l'état initial. Si donc on pose $W_k = -E_k$, la relation $E = E_k + h\nu$ nous donne la relation photoélectrique d'Einstein :

$$(20) \quad E = h\nu - W_k.$$

Bien entendu $h\nu$ doit être supérieur à W_k puisque E est positif. D'où l'existence de la fréquence seuil $\frac{W_k}{h}$ au-dessous de laquelle l'effet photoélectrique ne se produira pas.

Mais maintenant nous allons pouvoir aller plus loin puisque nous connaissons la probabilité de transition photoélectrique. Pour nous en tenir à un cas simple, nous supposons que l'état

velopper ω suivant le système des fonctions propres de l'atome sous la forme :

$$(10) \quad \omega = \sum_j c_j(t) \Psi_j + \sum_{E,l,m} c_{lm}(E,t) \Psi_{lm}(E)$$

la seconde sommation étant étendue au spectre continu.

Posons, comme nous l'avons fait déjà, la définition d'opérateur :

$$(11) \quad p_x^- = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot e^{-2\pi i \frac{v}{c} z}$$

En reprenant le calcul précédemment fait pour l'effet Compton et en tenant compte de la condition initiale $c_{lm}(E, 0) = 0$, on trouve :

$$(12) \quad c_{lm}(E,t) = \frac{eh^0}{4\pi m v} \frac{(p_x^-)_{E,l,m;k} \left[e^{\frac{2\pi i}{h} (E_k - E + h\nu)t} - 1 \right]}{E_k - E + h\nu}$$

où l'on a :

$$(13) \quad (p_x^-)_{E,l,m;k} = \int a_{lm}^*(E) e^{-2\pi i \frac{v}{c} z} p_x(a_k) dx dy dz$$

$a_{lm}(E)$ et a_k étant les amplitudes de $\Psi_{lm}(E)$ et de Ψ_k .

La probabilité pour qu'au temps t , l'électron soit passé de son état initial Ψ_k à un état final $\Psi_{lm}(E)$ correspondant à certaines valeurs entières de l et de m et à une valeur positive de E comprise dans l'intervalle $E \rightarrow E + \Delta E$ est, d'après les principes généraux de la nouvelle Mécanique :

$$(14) \quad P_{lm}(E,t) = \int_{\Delta E} |c_{lm}(E,t)|^2 \rho_{lm}(E) dE$$

$\rho_{lm}(E) dE$ étant le nombre des fonctions propres d'indices l et m correspondant à l'intervalle $E \rightarrow E + dE$. La probabilité de transition par unité de temps s'obtiendra en posant :

$$(15) \quad \pi_{lm}(E,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} P_{lm}(E,t) \right)$$

ce qui donnera ici :

$$(16) \quad \pi_{lm}(E,t) = \left(\frac{eh^0}{4\pi m v} \right)^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \int_{\Delta E} |(p_x^-)_{E,l,m;k}|^2 \frac{2[1 - \cos \frac{2\pi}{h} (E_k + h\nu - E)t]}{(E_k + h\nu - E)^2} \rho_{lm}(E) dE \right)$$

cette question et nous adopterons sans plus de justification l'équation (7) à la place de l'équation (6).

Nous allons supposer que l'atome irradié, placé en 0 sur la figure 19, se trouve au début de la perturbation dans l'état quantique représenté par l'onde Ψ_k , Ψ_k étant une fonction propre de l'Hamiltonien non perturbée ⁽¹⁾. Nous voulons calculer la probabilité pour que, sous l'influence de l'onde incidente, l'électron atomique passe de l'état Ψ_k à un état de mouvement libre à l'extérieur de l'atome, état qui sera représenté par une des fonctions du spectre continu de l'atome. Le spectre continu de l'atome correspond, en effet, aux valeurs positives de l'énergie E . D'ailleurs ces valeurs positives de E sont des valeurs propres dégénérées, c'est-à-dire qu'à une valeur positive donnée de E , correspondent plusieurs fonctions propres du spectre continu. En effet, à la valeur E correspondent les fonctions propres :

$$(8) \quad \Psi_{l,m}(E) = f_{E,l}(r) P_{lm}(\cos \theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} Et}$$

où m et l sont deux nombres entiers assujettis seulement aux conditions $l \geq 0$ et $m \leq l$; $f(r)$ est une fonction du rayon vecteur r qui pour les grandes valeurs de r tend vers la forme asymptotique ⁽²⁾ $\frac{G}{r} e^{-\frac{2\pi i}{h} \sqrt{2mE} r}$. A grande distance de l'atome, $\Psi_{l,m}(E)$ représente donc une onde sphérique divergente dont l'amplitude est fonction des angles θ et φ . Pour chaque direction OM (voir figure 19), elle correspond à un mouvement rectiligne et uniforme d'énergie E .

Le problème que nous avons à résoudre est donc de trouver la probabilité pour que, sous l'influence du rayonnement incident, l'atome primitivement dans l'état Ψ_k passe dans un des états $\Psi_{lm}(E)$ du spectre continu.

Sous l'action de la perturbation due à l'irradiation, l'état de l'atome devient :

$$(9) \quad \Psi = \Psi_k + \omega$$

ω étant une petite modification de la fonction Ψ_k . On peut dé-

⁽¹⁾ Dans la théorie de la diffusion, nous avons écrit Ψ_k^0 au lieu de Ψ_k . Ici, comme il n'y a pas de confusion à craindre, nous supprimons l'indice 0 .

⁽²⁾ En réalité, la fonction propre est la somme de l'expression indiquée et de l'imaginaire conjuguée. Pour représenter l'émission d'un photoélectron, on ne conserve de la fonction propre que la partie ayant la forme d'une onde sphérique *divergente*.

L'angle α est, par définition, l'angle de bipartition. La répartition des photoélectrons reste d'ailleurs sensiblement symétrique par rapport au plan de bipartition. L'angle α est toujours petit, même avec les Rayons X très durs, et il obéit aux deux lois suivantes :

1° Pour un même élément irradié et une même énergie d'extraction, l'angle α croît avec la fréquence ν de la radiation incidente.

2° Pour une même fréquence ν de la radiation incidente, l'angle α est d'autant plus petit que l'énergie d'extraction est plus grande.

La théorie quantique par correspondance va nous rendre compte aussi de ces deux lois.

2. Théorie quantique par correspondance de l'effet photoélectrique. — Pour faire par correspondance la théorie quantique de l'effet photoélectrique, nous allons partir de l'équation qui exprime la perturbation de l'état d'un atome sous l'influence d'une radiation incidente monochromatique. Nous prendrons toujours la direction de propagation comme axe des z et nous supposerons la radiation incidente rectilignement polarisée, la direction du vecteur électrique étant prise pour axe des x .

Nous savons que l'équation d'ondes de l'atome irradié est alors :

$$(6) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0 \Psi + \frac{e}{m} \frac{h^0}{2\pi \nu} \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{z}{c} \right) p_x(\Psi)$$

p_x étant l'opérateur bien connu. Nous allons ici remplacer le cosinus par l'exponentielle dont il est la partie réelle et écrire :

$$(7) \quad \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H^0(\Psi) + \frac{eh^0}{2\pi m\nu} e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{z}{c} \right)} p_x(\Psi)$$

Nous faisons ce changement parce que, sans lui, nous obtiendrions des termes n'ayant pas de sens physique que nous serions obligés ensuite de laisser arbitrairement de côté. Ici se révèle encore une fois le caractère peu rigoureux de la théorie quantique par correspondance qui doit adopter tantôt l'expression réelle des champs électromagnétiques, tantôt leur expression complexe. Une bonne théorie de la lumière devrait permettre d'écarter ces difficultés : nous avons des raisons de penser qu'elle devrait employer systématiquement les expressions complexes des champs électromagnétiques. Mais nous ne pouvons nous étendre ici sur

Cette loi en $\sin^3 \theta$ est d'ailleurs évidemment valable pour une orientation quelconque de ox . Elle est donc valable pour une polarisation quelconque de la radiation incidente et, en particulier, pour une radiation incidente naturelle. M. Pierre Auger l'a en effet vérifiée pour des Rayons X, non polarisés.

Dans un remarquable essai théorique ⁽¹⁾, MM. Francis Perrin et Pierre Auger ont montré que les lois de répartition précédentes peuvent se déduire de considérations de symétrie tout à fait indépendantes du mécanisme de l'effet photoélectrique. Nous les retrouverons plus loin comme résultat de la théorie quantique par correspondance.

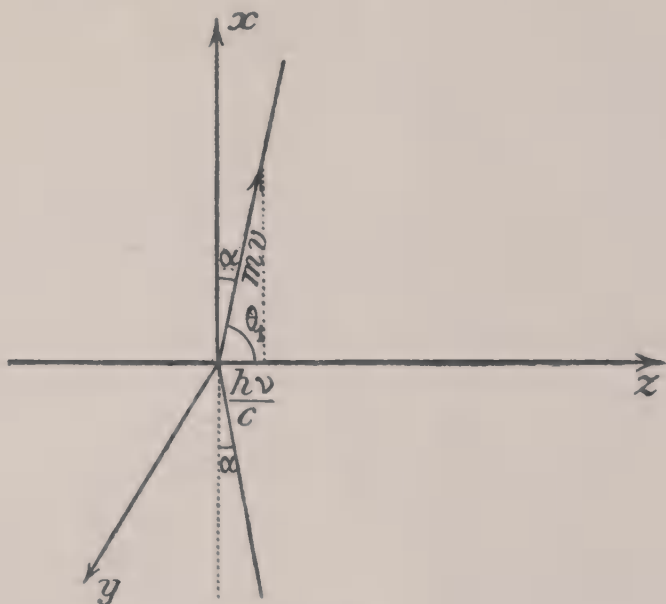


Fig. 20.

Nous venons d'exposer les lois valables pour les Rayons X assez mous. Pour les Rayons X durs, on observe un déplacement de l'ensemble de la répartition des électrons vers l'avant, dans le sens de la propagation de l'onde incidente. Avec les Rayons X mous, le plan xoy est un « plan de bipartition », c'est-à-dire qu'il y a autant d'électrons projetés vers l'avant que vers l'arrière par rapport à ce plan. Pour les Rayons durs au contraire, il y a un cône de bipartition dont les génératrices font un angle α avec ox dans le sens de oz .

⁽¹⁾ *Journal de Physique*, t. VIII (1927), p. 93.

colatitude et de longitude. Quelle va être la proportion de photoélectrons expulsés dans les différentes directions ? Ou, ce qui revient au même, quelle va être la probabilité pour qu'un photoélectron soit projeté dans une direction déterminée ? Naturellement la théorie purement corpusculaire des photons ne peut pas répondre à une telle question puisque le vecteur électrique, dont la direction joue ici un rôle essentiel, n'y est pas défini.

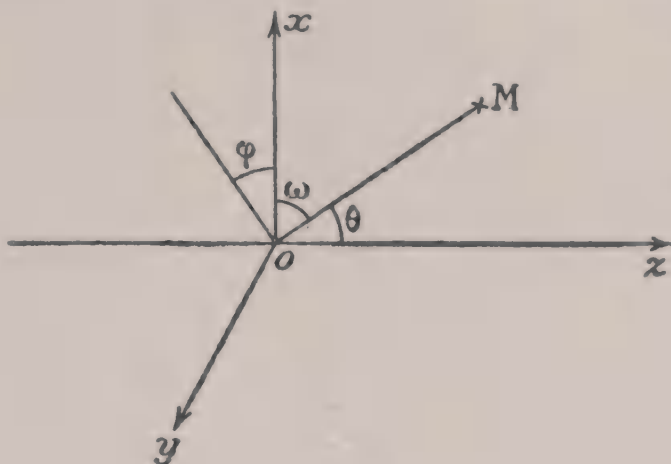


Fig. 19.

Avant d'aborder la théorie, voyons d'abord ce que donne l'expérience. L'emploi de compteurs à pointes de Geiger ou de la chambre à détente de Wilson a permis à MM. Bubb, Kirchner et Pierre Auger d'étudier la répartition angulaire des photoélectrons. Pour les Rayons X assez mous, ils ont dégagé la loi suivante : la répartition des photoélectrons pour une onde incidente polarisée rectilignement est de révolution autour de la direction du vecteur électrique ; autrement dit, la probabilité d'expulsion d'un photoélectron dans la direction OM ne dépend que de l'angle ω de OM avec ox . Les résultats expérimentaux paraissent se bien exprimer en disant que le nombre des photoélectrons projetés dans une direction OM est proportionnel à $\cos^2 \omega$. Comme on a visiblement sur la figure 19 : $\cos \omega = \sin \theta \cos \varphi$, le nombre des photoélectrons projetés dans les directions qui font avec oz des angles compris entre θ et $\theta + d\theta$ doit être proportionnel à :

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot 2\pi \sin \theta d\theta d\varphi \sim \sin^3 \theta d\theta$$

pour $\frac{W_L}{h} < \nu < \frac{W_K}{h}$	«	«	«	«	$h\nu - W_N,$ $h\nu - W_M, h\nu - W_L$
pour $\nu < \frac{W_K}{h}$	«	«	«	«	$h\nu - W_N,$ $h\nu - W_M, h\nu - W_L, h\nu - W_K$

Si l'on peut mesurer l'énergie des diverses catégories de photoélectrons, on pourra : 1° vérifier la loi photoélectrique ; 2° obtenir des renseignements sur la structure des atomes irradiés par la détermination des énergies de liaison W_K , W_L , W_M , etc. Chaque catégorie de photoélectrons a son seuil photoélectrique bien net $\frac{W_N}{h}$, $\frac{W_M}{h}$ etc. La mesure des énergies des photoélectrons a lieu en les soumettant à un champ magnétique uniforme qui rend leur trajectoire circulaire sans modifier leur énergie et en enregistrant le point d'impact de ces photoélectrons sur une plaque photographique. La connaissance du champ magnétique, qui doit être bien uniforme et soigneusement mesuré, permet de calculer l'énergie des divers groupes de photoélectrons. La composition du rayonnement X incident étant connue, on peut aisément vérifier la loi photoélectrique et confronter les valeurs trouvées pour W_L , W_K , etc., avec les valeurs résultant de l'étude du spectre X du corps irradié. L'accord a été trouvé excellent (Maurice de Broglie, 1921). Avec les rayons γ , on peut aussi obtenir une très bonne vérification de la théorie (Ellis, Thibaud). Quand la fréquence des radiations incidentes est inconnue, la relation photoélectrique peut servir à la déduire de l'énergie observée des photoélectrons.

La relation photoélectrique d'Einstein entre la fréquence de l'onde incidente et l'énergie des photoélectrons expulsés est donc très bien vérifiée et cette vérification apporte une forte confirmation à l'hypothèse des photons. Mais d'autres questions importantes se posent au sujet de l'effet photoélectrique. Considérons en effet une onde incidente rectilignement polarisée : soit oz la direction de propagation et ox la direction du vecteur électrique de l'onde.

Les photoélectrons produits par l'action de cette radiation sur une parcelle de matière placée en O sont projetées dans toutes les directions, chacune étant caractérisée dans le système de coordonnées polaires d'axe polaire oz par les deux angles θ et φ de

électrons ont des énergies comparables à W_0 . En se plaçant à ce point de vue, on peut se rendre compte du fait qu'il n'y a pas intersection, mais raccordement entre la courbe donnant W en fonction de ν et l'axe des abscisses ⁽¹⁾.

On voit par ce qui précède combien est délicate l'étude exacte du phénomène photoélectrique dans le domaine de la lumière. Aussi, bien que ce phénomène ait été le plus anciennement connu et qu'il ait suggéré la théorie d'Einstein, le laisserons-nous ici de côté et fixerons-nous notre attention sur l'étude du phénomène photo-électrique dans le domaine des Rayons X et γ . Dans ce dernier domaine, en effet, l'effet photoélectrique est beaucoup plus aisé à étudier et ses lois sont d'une grande simplicité. Comme tous les corps sont formés d'atomes contenant eux-mêmes des électrons plus ou moins fortement liés, un rayonnement X de fréquence suffisamment élevée parviendra toujours à arracher ces électrons intraatomiques de sorte que toute matière soumise à l'action de Rayons X suffisamment durs présentera toujours l'effet photoélectrique. De plus, pour chaque catégorie d'électrons intraatomiques, le travail d'ionisation, c'est-à-dire le travail qu'il faut fournir pour libérer l'électron du lien atomique, est bien déterminé et généralement beaucoup plus considérable que le travail de sortie des électrons libres hors d'un métal : en particulier, il ne dépend nullement de l'état superficiel de la substance. La définition des fréquences-seuils est donc pour chaque catégorie d'électrons beaucoup plus nette que dans le cas de la lumière.

Soit, par exemple, un corps simple dont les atomes possèdent des électrons K fortement liés, des électrons L un peu moins liés.... jusqu'à des électrons N assez peu liés. En faisant agir sur ce corps des Rayons X de fréquence croissante, on doit observer ce qui suit :

pour	$\nu < \frac{W_N}{h}$	pas d'effet photoélectrique	
pour	$\frac{W_N}{h} < \nu < \frac{W_M}{h}$	expulsion de photoélectrons d'énergie	$h\nu - W_N$
pour	$\frac{W_M}{h} < \nu < \frac{W_L}{h}$	«	«
		«	«
			$h\nu - W_N,$
			$h\nu - W_M$

(1) Voir DUBRIDGE, *New theory of the photoelectric effect*. Actualités scientifiques, Hermann, 1935, fascicule n° 268.

qu'il est nécessaire de dépenser pour extraire de ce métal un électron initialement au repos, ou presque au repos, dans le métal. Un quantum de lumière, en cédant son énergie $h\nu$ à un tel électron, provoque donc l'expulsion de celui-ci hors du métal avec l'énergie cinétique :

$$(3) \quad W = h\nu - W_0$$

à condition toutefois que l'on ait $h\nu > W_0$. La théorie d'Einstein prévoit donc que le coefficient angulaire de la droite représentant W en fonction de ν doit être égal à h : en d'autres termes, le coefficient k de la loi empirique (1) doit être égal à la constante de Planck et c'est bien ce que l'expérience confirme. De plus, la théorie d'Einstein explique aussi l'existence d'une fréquence-seuil

$$(4) \quad \nu_0 = \frac{W_0}{h}$$

de sorte qu'on peut écrire à la place de (3) :

$$(5) \quad W = h(\nu - \nu_0)$$

La fréquence-seuil ainsi définie est située dans le violet ou l'ultra-violet suivant les corps irradiés et correspond à une différence de potentiel de quelques volts. Elle dépend d'ailleurs sensiblement de l'état superficiel du corps irradié, ce qui rend assez délicate l'étude précise de l'effet photoélectrique dans le domaine de la lumière. De plus une étude attentive de la relation réelle entre W et ν montre que cette relation ne reste pas linéaire jusqu'à $W = 0$: la droite qui représente W en fonction de ν ne vient pas couper l'axe des abscisses au point $\nu = \nu_0$, elle s'infléchit au voisinage de cet axe de façon à venir se raccorder asymptotiquement avec lui. Ceci peut s'expliquer en remarquant que, dans un métal, les électrons ne sont pas tous au repos et, par suite, qu'un certain nombre d'entre eux peuvent sortir du métal sans avoir reçu l'énergie W_0 du photon incident. Cette complication serait complètement négligeable si, dans les métaux, les électrons libres suivaient la statistique de Boltzmann, comme on l'admettait naguère à la suite de Drude et Lorentz, car alors le nombre de ces électrons ayant dans le métal une énergie cinétique comparable à W_0 serait infime. Mais nous savons aujourd'hui que, dans les métaux, les électrons forment un gaz dégénéré suivant la statistique de Fermi-Dirac et il en résulte qu'un grand nombre de ces

CHAPITRE IX

L'EFFET PHOTOÉLECTRIQUE

1. Généralités sur l'effet photoélectrique. — Nous voulons maintenant étudier le phénomène photoélectrique. Commençons par rappeler en quoi il consiste. Un morceau de matière soumis à l'irradiation d'une lumière de fréquence suffisamment élevée expulse souvent des électrons dont la vitesse d'éjection dépend uniquement de la fréquence de l'onde incidente ; seul, le nombre de ces électrons dépend de l'intensité de la lumière employée. Il existe un « seuil photoélectrique », c'est-à-dire une fréquence limite inférieure au-dessous de laquelle aucun effet photoélectrique ne se produit plus. L'examen de la manière dont varie l'énergie des électrons expulsés en fonction de la fréquence de la radiation incidente montre que la relation est linéaire de la forme :

$$(1) \quad W = k\nu - W_0$$

k étant une constante que l'on peut déterminer en construisant le graphique qui représente la variation de W en fonction de ν . La fréquence seuil ν_0 est :

$$(2) \quad \nu_0 = \frac{W_0}{k}$$

M. Einstein a interprété le phénomène photoélectrique en admettant que la lumière de fréquence ν est formée de grains d'énergie de valeur $h\nu$, h étant la constante de Planck. Avec la lumière proprement dite, l'effet photoélectrique se produit pour les métaux dans lesquels on admet qu'il existe des électrons libres non engagés dans les liens atomiques. Ces électrons libres sont retenus dans le métal par des forces électriques superficielles que l'on peut représenter par une différence de potentiel existant à la surface du métal. Pour un métal déterminé, il existe donc en principe un certain travail W_0

tron. Il ne faut pas oublier que les images ondulatoires de la nouvelle Mécanique ne nous permettent pas de décrire en détails à la façon classique les phénomènes sous leur aspect individuel, quantique et discontinu ; elles nous permettent seulement d'obtenir une représentation statistique et globale des possibilités. L'image proposée par M. Schrödinger est bien en effet une représentation globale des échanges possibles d'énergie et d'impulsion entre électron et radiation par effet Compton. Mais cet effet est d'une nature trop spécifiquement quantique pour qu'une semblable image puisse nous en fournir une représentation intuitive vraiment assimilable aux représentations de la Physique classique.

En regardant la figure (18), on voit alors immédiatement que l'on a :

$$(60) \quad P_x'^0 - P_x^0 = 2 \frac{h}{\lambda_0} \sin \theta_0.$$

D'autre part, compte tenu de (55), on a :

$$(61) \quad \Lambda_0 = \frac{h}{|\vec{p}_0' - \vec{p}_0|} = \frac{h}{\sqrt{(p_x'^0 - p_x^0)^2 + \dots}} = \frac{h}{|p_x'^0 - p_x^0|}.$$

D'après (60) et (61), l'équation (57) est équivalente à :

$$(62) \quad P_x'^0 + p_x'^0 = P_x^0 + p_x^0.$$

tandis que les relations (55) et (59) donnent

$$(63) \quad P_y'^0 + p_y'^0 = P_y^0 + p_y^0; \quad P_z'^0 + p_z'^0 = P_z^0 + p_z^0.$$

Enfin, comme on a $\nu'_0 = \nu_0$, c'est-à-dire $W'^0 = W^0$ et que $W'^0 = W^0$, il vient :

$$(64) \quad W'^0 + w'^0 = W^0 + w^0.$$

Les formules (62), (63) et (64) expriment l'égalité des 4 composantes d'un quadrivecteur d'espace-temps. Ces quadrivecteurs sont donc égaux et l'on a, avec des notations dont le sens est évident, dans tout système de référence Galiléen :

$$(65) \quad \begin{cases} P_x' + p_x' = P_x + p_x; & P_y' + p_y' = P_y + p_y \\ P_z' + p_z' = P_z + p_z; & W' + w' = W + w. \end{cases}$$

Or ces équations (65) expriment la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement lors du choc entre l'électron et le photon et conduisent, nous le savons, aux relations de Compton-Debye. On voit alors, d'une façon qui paraît assez intuitive, comment la Mécanique ondulatoire retrouve les résultats de la théorie purement quantique de l'effet Compton.

Néanmoins, il convient de se méfier un peu de ces images dites « intuitives » des théories quantiques. En réalité, l'image précédente n'est nullement en accord avec l'intuition ou avec les conceptions classiques. La densité d'électricité périodique (53), qui nous a servi plus haut à représenter le phénomène de Compton, est en effet obtenue à l'aide d'une superposition de l'état initial et de l'état final de l'électron et l'image tout entière correspond à un état de régime bien différent de l'échange discontinu et quantique d'énergie et d'impulsion entre un photon et un élec-

nouveau système puisque cette onde y est stationnaire. Donc $|\vec{p}^0|$ et $|\vec{p}'^0|$ sont égaux et ces vecteurs font des angles égaux avec les plans nodaux et ventraux de l'onde de densité électrique. Si l'on prend la normale à ces plans pour axe des x^0 , on a la figure suivante :

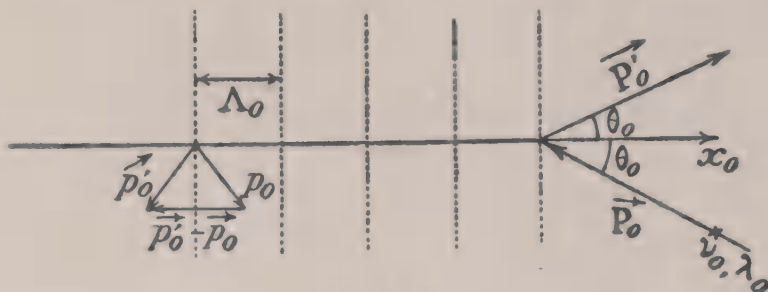


Fig. 18.

On a donc :

$$(55) \quad p_x^0 = -p_x'^0; \quad p_y^0 = p_y'^0; \quad p_z^0 = p_z'^0.$$

Sur ce système de plans semi-réfecteurs régulièrement espacés de Λ_0 , tombe sous l'angle d'incidence θ_0 une onde de longueur d'onde λ_0 (partie droite de la figure 18). Cette onde sera fortement réfléchie dans la direction de réflexion régulière (comme il est indiqué sur la figure 18) si l'on a la relation de Bragg bien connue dans la théorie des Rayons X :

$$(56) \quad 2\Lambda_0 \sin \theta_0 = \lambda_0$$

obtenue en exprimant la concordance de phase des ondes diffrusées ⁽¹⁾. Cette relation peut d'ailleurs s'écrire aussi :

$$(57) \quad 2 \frac{h}{\lambda_0} \sin \theta_0 = \frac{h}{\Lambda_0}.$$

Puisqu'il n'y a pas de changement de fréquence par réflexion dans ce système de référence où la distribution électrique est stationnaire, nous avons :

$$(58) \quad |P_0| = \frac{h}{\lambda_0} = |P_0'|$$

ou, en tenant compte des directions de propagation :

$$(59) \quad P_x^0 = -P_x'^0; \quad P_y^0 = P_y'^0; \quad P_z^0 = P_z'^0.$$

⁽¹⁾ Dans la formule complète de BRAGG, on a au second membre $n\lambda_0$, n étant : entier. Ici, assez arbitrairement, on se limite au cas $n = 1$.

analogue qu'il donne naissance à un seul terme de la forme $A_1 \Psi_{2,1}$ ($h\nu + E_k$). Dans son livre *Wellenmechanischer Ergänzungsband*, M. Sommerfeld a calculé le rapport $\frac{A_1}{A_2}$ en se servant des fonctions propres d'un atome hydrogénoïde de nombre atomique Z , c'est-à-dire un atome dont le noyau porte la charge Ze et qui contient un seul électron, ou tout au moins dans lequel on peut considérer à part un seul électron. En appelant ν la vitesse du photoélectron et a le rayon du cercle K dans l'atome de Bohr, nous poserons :

$$(38) \quad k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(h\nu + E_k)}; \quad a = \frac{h^2}{4\pi m e^2}.$$

En admettant que l'état initial est l'état d'énergie minimum, M. Sommerfeld trouve

$$(39) \quad \Psi_{ph} \sim \left[1 + \frac{36\pi\nu}{5c} \frac{k - i \frac{Z}{a}}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}} \cos \theta \right] \sin \theta \cos \varphi.$$

Malgré le caractère un peu grossier des approximations faites, on peut admettre que la formule (39) permettra de prévoir les grandes lignes du phénomène. Si l'on forme la quantité $|\Psi_{ph}|^2$ d'après (39), on trouve en négligeant toujours les termes en ν^2 comme on l'a fait en (36) :

$$(40) \quad |\Psi_{ph}|^2 \sim \left[1 + \frac{36\pi\nu}{5c} \frac{2k \cos \theta}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}} \right] \sin^2 \theta \cos^2 \varphi.$$

On voit qu'on a toujours la même répartition des photoélectrons en φ que pour les Rayons X mous, mais la répartition en θ est modifiée. En effet, pour un angle φ donné, la répartition n'est plus symétrique par rapport à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les angles inférieurs à $\frac{\pi}{2}$ sont avantagés par l'apparition dans le crochet du terme en $\cos \theta$. Si nous désignons par $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ le complément de l'angle α de bipartition (voir figure 20), cet angle θ_1 sera défini par :

$$(41) \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\theta_1} \frac{|\Phi_{ph}|^2}{\cos^2 \varphi} \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{|\Phi_{ph}|^2}{\cos^2 \varphi} \sin \theta \, d\theta$$

soit, en supprimant aux deux membres l'intégrale en φ :

$$(42) \quad \int_0^{\theta_1} \left(1 + \frac{36\pi\nu}{5c} \frac{2k \cos \theta}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}} \right) \sin^3 \theta \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\pi} \left(1 + \frac{36\pi\nu}{5c} \frac{2k \cos \theta}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}} \right) \sin^3 \theta \, d\theta.$$

Posons :

$$(43) \quad x = \frac{36\pi\nu}{5c} \cdot \frac{2k}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}}; \quad x = \cos \theta; \quad x_1 = \cos \theta_1.$$

On a :

$$(44) \quad \int_{x_1}^1 (1 + \kappa x)(1 - x^2)dx = \int_{-1}^{x_1} (1 + \kappa x)(1 - x^2)dx.$$

D'après nos hypothèses (Rayons X pas trop durs), l'angle de bipartition α doit évidemment être petit : θ_1 est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et x_1 de 0. En effectuant les intégrations dans (44) et en négligeant les puissances de x_1 supérieures à la première, nous trouvons :

$$(45) \quad x_1 = \cos \theta_1 = \frac{\kappa}{4} = \sin \alpha$$

d'où approximativement :

$$(46) \quad \alpha = \frac{\kappa}{4} = \frac{18\pi\nu}{5c} \cdot \frac{k}{k^2 + \frac{Z^2}{a^2}}.$$

Pour étudier le résultat obtenu, il est commode d'explicitier k et a . On trouve alors :

$$(47) \quad k^2 + \frac{Z^2}{a^2} = \frac{8\pi^2 m}{h^2} (h\nu + E_k) + \frac{16\pi^4 m^2 e^4}{h^4} Z^2 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(h\nu + E_k + \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} Z^2 \right).$$

Or, si l'état initial de l'électron est l'état de moindre énergie, on sait que E_k est donné par la formule de Bohr (qui subsiste en Mécanique ondulatoire) :

$$(48) \quad E_k = - \frac{2\pi^2 m e^4}{h^2} Z^2.$$

On a donc simplement :

$$(49) \quad k^2 + \frac{Z^2}{a^2} = \frac{8\pi^2 m \nu}{h}.$$

En substituant cette valeur dans (46), il vient :

$$(50) \quad \alpha = \frac{9}{10c} \frac{\sqrt{2m(h\nu + E_k)}}{m}.$$

Pour les Rayons X pas trop durs que nous considérons, la vitesse ν des photoélectrons est assez faible pour qu'on puisse

négliger les corrections de relativité et écrire la formule d'Einstein sous la forme :

$$(51) \quad \frac{1}{2} m v^2 = h\nu + E_k$$

ce qui permet de remplacer (5) par :

$$(52) \quad \alpha = \frac{9}{10} \frac{v}{c}.$$

D'ailleurs, la formule (50) nous donne tout de suite les deux lois révélées par l'expérience dont nous avons parlé à la fin du premier paragraphe car on y voit que

1° pour E_k donné, α croît avec ν .

2° pour ν donné, α décroît quand l'énergie de liaison — E_k augmente.

Physiquement l'origine de l'inclinaison vers l'avant de la répartition des photoélectrons doit être cherchée dans l'existence d'une quantité de mouvement du photon incident. Cette quantité de mouvement qu'on peut négliger pour les Rayons X mous devient appréciable pour les Rayons X plus durs et communique aux photoélectrons une composante de vitesse vers l'avant, d'où l'inclinaison vers l'avant de leur répartition. On peut voir avec M. Sommerfeld qu'on obtient de cette façon un accord au moins qualitatif avec la formule (52). En effet, si l'on admet qu'en l'absence de quantité de mouvement du photon incident, les photoélectrons n'auraient pas en moyenne de composante de vitesse perpendiculaire à xoy (fig. 20), il est naturel d'admettre qu'en présence de cette quantité de mouvement un photoélectron émis dans la bipartition avec la vitesse v doit avoir une composante de quantité de mouvement le long de oz égale à la quantité de mouvement $\frac{h\nu}{c}$ du photon incident. Si l'on admet cette hypothèse et si la vitesse des photoélectrons v est assez faible pour qu'on puisse négliger les corrections de relativité, on aura :

$$(53) \quad mv \sin \alpha = \frac{h\nu}{c}$$

ou, puisque α est très petit, sensiblement :

$$(54) \quad \alpha = \frac{h\nu}{mcv}$$

d'où l'on tire en tenant compte de la relation d'Einstein

$$(55) \quad \alpha = \frac{\frac{1}{2} m v^2 - E_k}{mcv} = \frac{1}{2} \frac{v}{c} \quad \text{si} \quad E_k \ll \frac{1}{2} m v^2.$$

La formule (55) diffère par un facteur $\frac{9}{5}$ de la formule (52), mais elle est analogue.

Nous avons obtenu (formule 40) :

$$(56) \quad \Phi_{ph} \sim [1 + x \cos \theta] \sin^2 \theta \cos^2 \varphi.$$

L'émission des photoélectrons dans un méridien passant par oz est maximum pour la valeur de θ qui annule la dérivée :

$$(57) \quad \frac{d}{d\theta} [(1 + x \cos \theta) \sin^2 \theta] = 2 \sin \theta (\cos \theta + x \cos^2 \theta - \frac{x}{2} \sin^2 \theta).$$

Comme le maximum cherché correspond pour les Rayons X pas trop durs à un angle θ voisin de $\frac{\pi}{2}$, nous pouvons faire $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans les termes contenant la petite quantité x . On trouve aisément comme solution de (57) :

$$(58) \quad \cos \theta_{\max} = \frac{x}{2} \quad \text{ou} \quad \theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}.$$

Comme d'après (46), l'angle de bipartition est égal à $\frac{x}{4}$, nous voyons que la direction du maximum d'émission photoélectrique est projetée vers l'avant d'un angle double égal à $\frac{x}{2}$. On peut d'ailleurs vérifier que la forme d'ensemble de la courbe de répartition n'est pas sensiblement modifiée par sa projection vers l'avant et l'on a la courbe suivante :

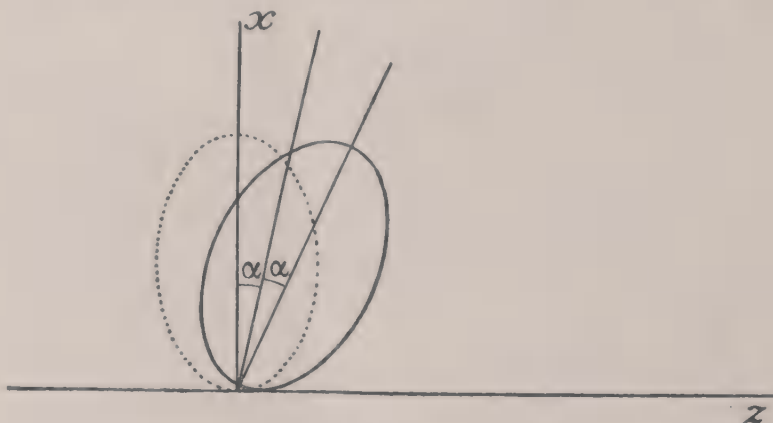


Fig. 21.

Naturellement toute la théorie précédente est assez approximative à cause de l'emploi des fonctions propres de l'hydrogène. De plus, dès que les Rayons X considérés deviennent durs, l'approximation exprimée par la formule (36) n'est plus valable et il

faudrait alors faire une théorie plus exacte. D'autre part, si l'état initial n'était pas un état s , cet état initial ne serait plus isotrope et sa symétrie réagirait sur la symétrie de l'effet photoélectrique obtenu. Là aussi des calculs plus compliqués seraient nécessaires. Néanmoins, M. Wentzel a pu démontrer que, pour les Rayons X mous, la loi en $\cos^2\omega$ reste exacte pour un état initial quelconque et un radiateur non cristallisé par suite de l'orientation au hasard des atomes dans une substance amorphe.

5. Absorption photoélectrique des Rayons X. — Quand un faisceau de Rayons X traverse la matière, il s'affaiblit par suite des effets photoélectriques qu'il y produit. Cet affaiblissement se traduit par une loi exponentielle de décroissance de l'intensité avec l'épaisseur traversée de la forme :

$$(59) \quad I = I_0 e^{-\mu x}$$

qui correspond à l'affaiblissement $dI = -\mu I_0 dx$ dans l'épaisseur infinitésimale dx . La constante μ est le coefficient linéaire d'absorption photoélectrique. Si l'on considère une tranche de matière de base égale à l'unité perpendiculaire à la radiation incidente et d'épaisseur dx , on aura :

$$(60) \quad \frac{dE}{E} = -\mu dx$$

$\frac{dE}{E}$ étant le rapport de l'énergie absorbée dans la tranche par le processus photoélectrique à l'intensité incidente. Si N est le nombre d'atomes de la substance supposée homogène par unité de volume, il y aura Ndx atomes dans la tranche considérée et le coefficient d'absorption par atome est :

$$(61) \quad \mu_{at} = \frac{\mu}{N}$$

On peut mesurer μ en observant l'affaiblissement du faisceau traversant une épaisseur connue de la substance et en tenant compte, s'il y a lieu, des causes d'affaiblissement autres que l'effet photoélectrique (la diffusion par exemple). N est calculable par la densité ρ et le poids moléculaire A car, on a :

$$(62) \quad \rho = \frac{NA}{\eta_0}$$

η_0 étant le nombre d'Avogadro. On peut donc mesurer μ_{at} et

suivre ses variations en fonction de la longueur d'onde des Rayons X et de la nature de l'absorbant matériel. On trouve ainsi que μ_{at} est représenté, pour un corps donné, en fonction de la longueur d'onde excitatrice par une courbe telle que celle-ci :

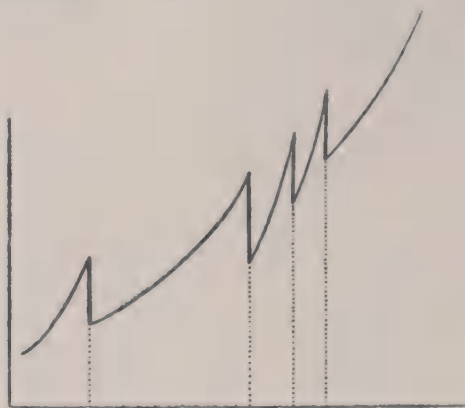


Fig. 22.

Les discontinuités sont aisées à interpréter. Quand la longueur d'onde augmente, la fréquence diminue ; à la longueur d'onde λ_k correspond la fréquence $\nu_k = \frac{W_k}{h}$, fréquence seuil pour l'effet photoélectrique sur les électrons K. Pour $\lambda > \lambda_k$, l'effet photoélectrique sur les électrons K ne se produit plus. D'où le brusque abaissement de μ_{at} pour $\lambda_k = \lambda$. Et de même pour les autres discontinuités.

Entre les discontinuités, on a sensiblement la loi suivante :

$$(63) \quad \mu_{at} = CZ^4\lambda^3 = C'Z^4\nu^{-3} \quad (\text{loi de Bragg Peirce})$$

d'où l'allure d'ensemble de la courbe 22. Z est le nombre atomique de l'absorbant.

Pour rendre compte des discontinuités, on peut écrire :

$$(64) \quad \mu_{at} = \sum_n a_n Z^4 \lambda^3$$

la somme Σ perdant un de ses termes quand la longueur d'onde traverse en croissant une des valeurs critiques de discontinuité. Autrement dit, la somme \sum_n est étendue seulement aux catégories d'électrons dont l'énergie d'extraction est inférieure au quantum $\frac{hc}{\lambda}$. Grâce à (64), on représente l'absorption photoélec-

trique globale comme étant la superposition des effets photoélectriques sur les diverses sortes d'électrons.

Un très grand nombre de travaux expérimentaux et théoriques ont été faits sur l'allure détaillée de ce phénomène d'absorption, en particulier sur la validité de la loi (63), sur les sauts d'absorption au passage par les longueurs d'onde critiques, sur la forme exacte des discontinuités, etc.

Nous ne pouvons entrer ici dans le détail de ces travaux. Nous dirons seulement qu'ils ont permis d'établir que la loi (63) de Bragg-Peirce n'est pas rigoureuse. M. Wingårdh, en recensant les résultats obtenus, a montré que si l'on écrit :

$$(65) \quad \mu_{at} = C^{te} Z^x \lambda^y$$

x varie suivant les cas de 3,7 à 3,8 et y de 2,5 à 3.

M. Wentzel a repris théoriquement la question en calculant complètement les probabilités d'expulsion photoélectriques à l'aide des fonctions d'onde hydrogéoïdes. Il a ainsi trouvé une loi de la forme :

$$(66) \quad \mu_{at} = aZ^5\lambda^{7/2} + bZ^4\lambda^3 + cZ^3\lambda^{5/2}$$

(où la valeur des coefficients a , b , c reste non déterminée par le raisonnement.) Cette formule peut représenter convenablement les résultats expérimentaux ; néanmoins, on ne peut guère parler que d'un accord global.



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
CHAPITRE I. — <i>Généralités sur les équations de Maxwell</i>	3
1. Les équations de Maxwell.....	3
2. La théorie électromagnétique de la lumière.....	6
3. La théorie des électrons.....	9
4. Les potentiels électromagnétiques.....	11
5. Rayonnement d'une distribution d'électricité en mouvement....	14
6. La théorie électromagnétique de la dispersion.....	20
CHAPITRE II. — <i>La théorie des quanta et le principe de correspondance</i> ..	25
1. Généralités sur la théorie des quanta.....	25
2. La théorie quantique de l'atome.....	31
3. Le principe de correspondance.....	34
4. L'effet Zeeman et les règles de sélection.....	39
CHAPITRE III. — <i>Les nouvelles Mécaniques et le principe de correspondance</i>	43
1. La Mécanique quantique d'Heisenberg.....	43
2. La Mécanique ondulatoire.....	48
3. Opérateurs et matrices en Mécanique ondulatoire	52
4. Le principe de correspondance en Mécanique ondulatoire.....	57
CHAPITRE IV. — <i>Traduction mathématique des interactions entre matière et radiation</i>	61
1. Termes d'interaction dans l'équation des ondes.....	61
2. Représentation d'une onde lumineuse plane et monochromatique	65
3. Perturbations subies par un atome plongé dans une onde lumi- neuse	66
4. Classification des phénomènes étudiés dans ce livre.....	68
CHAPITRE V. — <i>Diffusion cohérente et dispersion</i>	70
1. Théorie classique de la diffusion cohérente.....	70
2. Conséquence de la théorie précédente. Coefficient de diffusion..	74
3. Théorie classique de la dispersion.....	79
4. Théorie quantique par correspondance de la diffusion.....	84
5. Applications et remarques.....	91
6. Théorie quantique par correspondance de la dispersion.....	93
CHAPITRE VI. — <i>Aperçu sur l'effet Raman</i>	97
1. L'effet Raman et son interprétation classique.....	97
2. Théorie purement quantique de l'effet Raman. Sauts de Smekal.	99
3. Théorie quantique par correspondance de l'effet Raman.....	103
CHAPITRE VII. — <i>L'effet Compton</i>	107
1. Le phénomène de Compton et son interprétation quantique....	107

2. Théorie quantique et l'effet Compton sur un électron en mouvement	111
3. Théorie pseudo-classique de l'effet Compton.....	114
4. Théorie quantique par correspondance de l'effet Compton.....	117
5. Théorème de Wentzel. Comparaison de la diffusion Thomson et de la diffusion Compton.....	126
CHAPITRE VIII. — <i>L'effet Compton (suite)</i>	131
1. Théorie ondulatoire relativiste de l'effet Compton sur électron libre (Gordon).....	131
2. La formule de Klein et Nishina	141
3. Image de l'effet Compton d'après Schrödinger.....	142
CHAPITRE V. — <i>L'effet photoélectrique</i>	148
1. Généralités sur l'effet photoélectrique.....	148
2. Théorie quantique par correspondance de l'effet photoélectrique.	154
3. Cas des Rayons X mous.....	158
4. Cas des Rayons X assez durs.....	160
5. Absorption photoélectrique des Rayons X.....	165
TABLE DES MATIÈRES.....	169

SAINT-AMAND (CHER), FRANCE. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE. — 7-6-1938.



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.



F. ENRIQUES

De l'Académie *Dei Lincei*
Professeur à l'Université de Rome

**PHILOSOPHIE ET HISTOIRE
DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE**

Ch. FABRY

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences

OPTIQUE

E. FAURÉ-FREMIET

Professeur au Collège de France

BIOLOGIE

(Embryologie et Histogenèse)

Ch. FRAIPONT

Professeur à la Faculté des Sciences
de Liège

**PALÉONTOLOGIE
ET LES GRANDS PROBLÈMES
DE LA BIOLOGIE GÉNÉRALE**

Maurice FRECHET

Professeur à la Sorbonne

ANALYSE GÉNÉRALE

M. L. GAY

Professeur de Chimie-Physique
à la Faculté des Sciences de Montpellier

THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE

J. HADAMARD

Membre de l'Institut

**ANALYSE MATHÉMATIQUE
ET SES APPLICATIONS**

Victor HENRI

Professeur à l'Université de Liège

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

A. F. JOFFÉ

Directeur de l'Institut Physico-Technique
de Leningrad

PHYSIQUE DES CORPS SOLIDES

A. JOUNIAUX

Professeur à l'Institut de Chimie de Lille

CHIMIE ANALYTIQUE

(Chimie-Physique, minérale
et industrielle)

N. K. KOLTZOFF

Directeur de l'Institut de Biologie
expérimentale de Moscou

Membre honoraire R. S. Edinburgh

**LA GÉNÉTIQUE ET LES PROBLÈMES
DE L'ÉVOLUTION**

P. LANGEVIN

Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France

I. — RELATIVITÉ

II. — PHYSIQUE GÉNÉRALE

Louis LAPICQUE

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

**PHYSIOLOGIE GÉNÉRALE
DU SYSTÈME NERVEUX**

A. MAGNAN

Professeur au Collège de France

MORPHOLOGIE

DYNAMIQUE

ET MÉCANIQUE DU MOUVEMENT

Ch. MARIE

Directeur de Laboratoire
à l'Ecole des Hautes Etudes

ÉLECTROCHIMIE APPLIQUÉE

Ch. MAURAIN

Membre de l'Institut
Doyen de la Faculté des Sciences
Directeur de l'Institut de Physique du Globe

PHYSIQUE DU GLOBE

André MAYER

Professeur au Collège de France

PHYSIOLOGIE

Henri MINEUR

Astronome à l'Observatoire de Paris
Maître de Recherches

ASTRONOMIE STELLAIRE

Ch. MUSCELEANU

Professeur à la Faculté des Sciences
de Bucarest

PHYSIQUE GÉNÉRALE ET QUANTA

M. NICLOUX

Professeur à la Faculté de Médecine
de Strasbourg

CHIMIE ANALYTIQUE

(Chimie organique et biologique)

P. PASCAL

Correspondant de l'Institut
Professeur à la Sorbonne et à l'Ecole
Centrale des Arts et Manufactures

CHIMIE

GÉNÉRALE et MINÉRALE

Ch. PÉREZ

Professeur à la Sorbonne
BIOLOGIE ZOOLOGIQUE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE



ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.



J. PERRIN

Membre de l'Institut
Prix Nobel de Physique
Professeur à la Faculté des Sciences
de Paris

ATOMISTIQUE

Marcel PRENANT

Professeur à la Sorbonne

I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE

II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY

Professeur à la Sorbonne

HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD

Maître de Recherches

THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES

Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie

EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI

Professeur à l'Université Impériale de Tokyo

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)

Membre du Tokugawa Biologisches
Institut-Tokyo

BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE

Membre de l'Académie des Sciences
de l'U. R. S. S.

CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER

Sous-directeur de la Station
Biologique de Roscoff

BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN

Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN

Maître de Conférences à l'Institut
d'Hydrologie et de Climatologie de Paris

GÉOCHIMIE

Y. VERLAINE

Professeur à l'Université de Liège

PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS

Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique
de l'Université de Strasbourg

MAGNÉTISME

R. WURMSER

Directeur du Laboratoire de Biophysique
de l'Ecole des Hautes Etudes

BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 (suite) :

- | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 564. BALACHOWSKY (A.). Les cochenilles de France, d'Europe du Nord, de l'Afrique et du bassin méditerranéen. Caractères généraux des cochenilles. Morphologie interne. II ^e partie..... | 20 fr. |
| 565. HACHTROUDI (M.). Les espaces d'éléments à connexion projective normale..... | 25 fr. |
| 566. GUICHARD (M.). Essai sur les mesures scientifiques. I. De la sensation à la méthode de mesure..... | 10 fr. |
| 567. GUICHARD (M.). II. Aperçu historique sur les mesures chimiques. a) avant Lavoisier ; b) avec Lavoisier..... | 10 fr. |
| 568. GUICHARD (M.). III. Aperçu historique sur les mesures chimiques. c) après Lavoisier..... | 12 fr. |
| 569. JEUNEHOMME (W.). Calcul des équilibres physico-chimiques à l'aide des données de la spectroscopie..... | 25 fr. |
| 570. VALIRON (G.). Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées..... | 15 fr. |
| 571. VASILESCO (F.). La notion de capacité..... | 15 fr. |
| 572. ENRIQUES (F.) et DE SANTILLANA (G.). Le problème de la connaissance. Empirisme et rationalisme grecs..... | 15 fr. |
| 573. ENRIQUES (F.) et DE SANTILLANA (G.). Platon et Aristote..... | 15 fr. |
| 574. BEDEAU (F.). Théorie et technique du bruit de fond (Effets Schottky et Termique)..... | 25 fr. |
| 575. BRUNSCHWIG (L.). L'actualité des problèmes platoniciens..... | 8 fr. |



LISTE COMPLÈTE A LA FIN DU VOLUME

